

Trabajo Fin de Grado

Ingeniería Aeroespacial

Resonancia en Tierra en Helicópteros

Autor: Carlos Javier López Sierra

Tutores: Juana María Mayo Núñez

Emilio Freire Macías

Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Carrera
Ingeniería Aeroespacial

Resonancia en Tierra en Helicópteros

Autor:

Carlos Javier López Sierra

Tutores:

Juana María Mayo Núñez

Emilio Freire Macías

Catedrático de universidad

Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Trabajo Fin de Grado: Resonancia en Tierra en Helicópteros

Autor: Carlos Javier López Sierra

Tutor: Juana María Mayo Núñez
Emilio Freire Macías

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Agradecimientos

El trabajo de fin de grado es probablemente el más difícil que haya afrontado hasta ahora y, sin embargo, donde más me he quedado sin ideas, es a la hora de empezar a escribir los agradecimientos. Toca echar la vista atrás nada más y nada menos que cuatro años.

Son muchas personas y muchos recuerdos los que vienen a la mente en este momento. No obstante, yo tengo que empezar, sin ninguna duda, hablando de mis padres. Han sido el pilar y el apoyo principal toda mi vida, mucho antes de empezar la universidad, y sin ellos, yo hoy no estaría aquí. En cada suspenso, en cada fallo, yo no encontraba regañinas ni enfados sino un apoyo y un mensaje de aliento que me han hecho poder llegar hasta aquí a pesar de numerosos varapalos. Obviamente, también mencionar a mis dos hermanos, Gabriel y Mercedes, cuyo apoyo en la distancia también ha sido de vital importancia.

Las siguientes personas que se me vienen a la mente son mis amigos, desde los que ya tenía en Granada, hasta los que conocí en mis primeros días en la universidad y en la Residencia Universitaria Cartuja, de la cual guardo muy gratos recuerdos. Tuve la enorme fortuna de, a partir del segundo año, estudiar en la misma ciudad que mi mejor amigo Emilio, y seguir compartiendo momentos, en lo que son ya más de quince años. Nombrar también a Pablo, uno de mis mejores amigos del colegio y que he tenido la suerte de estudiar con él en la carrera, siendo una ayuda permanente. Por último, me gustaría nombrar a un tercer amigo: Paco; sin su increíble ayuda cada año en la carrera llegar hasta aquí no habría sido posible.

Por último agradecer también a todos y cada uno de los profesores que he tenido a lo largo de mi carrera que me han enseñado lo necesario para poder estar escribiendo hoy esto. Agradecer en especial a Juana y Emilio que me están acompañando en los últimos pasos que doy en la carrera.

Sé que me estoy dejando muchas personas que me han ayudado y acompañado a lo largo de estos cuatro años, pero es imposible escribirlas a todas o este texto no tendría fin.

Carlos Javier López Sierra

Sevilla, 2018

Resumen

El fenómeno de la resonancia en tierra es uno de los principales peligros que pueden afectar a un helicóptero. Éste es un fenómeno muy dañino y destructivo que puede acabar con un helicóptero destrozado en cuestión de segundos. Esta inestabilidad es causada por el acoplamiento del movimiento de las palas en el plano de rotación y el movimiento del fuselaje.

Desde este Trabajo de Fin de Grado se pretende el estudio del fenómeno desde un punto de vista teórico, así como desde un punto de vista del análisis numérico. Para ello, primero se explicará el fenómeno en detalle y se estudiará un modelo propuesto por Tomasz Kryszinski y François Malburet (aunque ampliamente conocido y trabajado también por varios autores más), pero el cuál ha sido deducido paso a paso como parte del trabajo. A continuación se implementará dicho modelo en Matlab obteniendo del mismo las variables bajo estudio, principalmente desplazamientos, tanto de las palas como del fuselaje. Se propondrán tres bloques de parámetros distintos para el análisis numérico. El primero de ellos se utilizará para calcular una curva que determine el sistema y, los otros dos, serán tales que uno se encuentre en la zona inestable del sistema y el otro en la zona estable, para poder observar el comportamiento en ambas zonas.

Por último, se realizará un estudio analítico que permitirá corroborar parte de la teoría así como se comparará la curva de estabilidad hallada con un criterio de estabilidad propuesto en la literatura.

Abstract

Ground resonance is one of the most dangerous problems that may arise on a helicopter. This phenomenon is very harmful and destructive that can finish with an helicopter destroyed in a few seconds. This instability is caused by coupling of the motion of the blades in the plane of rotation and the motion of the fuselage.

From this Project we expect to study this phenomenon from a theoretical point of view and from a numerical analysis point of view. First, we will explain the phenomenon in detail and a model proposed by Tomasz Kryszinski and François Malburet, but the model has been deduced step by step as a part of the project. Finally, the model will be implemented in Matlab in order to obtain the variables under study, mainly displacements, of the blades and the fuselage. Three parameters group will be proposed. The first of them will be used for compute the stability curve and, the other two, will be situated one in the unstable zone and one in the stable zone, to observe the behavior in both zones.

Last, an analytic analysis will be done. It will allow corroborate some of the things seen in the theory and also the stability curve obtained previously will be compared with a stability criteria proposed in other project.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de Figuras	xix
Notación	xxi
1 Introducción	1
1.1 <i>Motivación y objetivos</i>	1
1.2 <i>Helicópteros</i>	2
1.2.1 Tipos de rotores	4
1.3 <i>Estructura del documento</i>	5
2 Marco Teórico	7
2.1 <i>Introducción a la Resonancia en Tierra</i>	7
2.1.1 Condiciones	8
2.1.2 Soluciones contra la resonancia en tierra	10
2.2 <i>Casos de Resonancia en Tierra</i>	12
3 Modelo de Mínimos grados de libertad	15
3.1 <i>Planteamiento del modelo</i>	15
3.1.1 Movimiento de retraso	15
3.1.2 Movimiento lateral y longitudinal	16
3.2 <i>Deducción de las ecuaciones</i>	17
3.2.1 Energía cinética, potencial y disipativa	17
3.2.2 Hipótesis y simplificaciones	19
3.2.3 Aplicación de las ecuaciones de Lagrange	21
3.3 <i>Transformación de Coleman</i>	22
3.3.1 Derivadas del cambio de variable	26
3.3.2 Ecuación δ_o	27
3.3.3 Ecuación δ_{1c}	27
3.3.4 Ecuación δ_{1s}	28
3.3.5 Ecuación δ_{cp}	28
3.4 <i>Sistema de ecuaciones resultante</i>	28
4 Implementación en Matlab	31
4.1 <i>Estimación de parámetros</i>	31
4.1.1 Bloque de parámetros 1	33
4.1.2 Bloque de parámetros 2	34
4.1.3 Bloque de parámetros 3	35

4.2	<i>Comando ode45</i>	36
5	Resultados	39
5.1	<i>Cálculo de la estabilidad del sistema</i>	39
5.2	<i>Resultados BP1</i>	41
5.3	<i>Resultados BP2</i>	45
6	Estudio Analítico	49
6.1	<i>Análisis simplificado</i>	50
6.2	<i>Análisis completo</i>	51
6.3	<i>Comparación criterios de estabilidad</i>	53
7	Conclusiones	55
	Referencias	57
	Anexo: Programas de Matlab	59

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1. Masas del sistema	32
Tabla 4-2. Distancias del sistema y momento estático e inercia de cada pala	33
Tabla 4-3. Constantes de rigidez y amortiguamiento BP1	34
Tabla 4-4. Características modales BP1	34
Tabla 4-5. Constantes de rigidez y amortiguamiento BP2	35
Tabla 4-6. Características modales BP2	35
Tabla 4-7. Características modales BP3	35
Tabla 5-1. Valores usados en la interpolación en Matlab	40

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1. Mandos de vuelo de un helicóptero	3
Figura 1-2. Helicóptero EC-135	4
Figura 1-3. Tipos de rotores	5
Figura 2-1. Esquema Helicóptero (Figura Mechanical Instability).	7
Figura 2-2. Esquema del acoplamiento de movimientos	8
Figura 2-3. Diagrama Resonancia en Tierra. Frecuencia y amortiguamiento cambian como función de la velocidad de giro del rotor (Figura Mechanical Instability)	9
Figura 2-4. Efecto del amortiguamiento y de la rigidez (Figura Mechanical Instability)	11
Figura 2-5. Helibras HB-350BA después de un episodio de resonancia en tierra [18]	12
Figura 2-6. Boeing CH-47 Chinook después de un test de resonancia en tierra [19]	13
Figura 2-7. Schweizer 269C N2196F después de un episodio de resonancia en tierra [20]	13
Figura 3-1. Grado de libertad δ_i asociado a cada pala (Figura Mechanical Instability)	15
Figura 3-2. Grados de libertad x e y asociados al fuselaje (Figura Mechanical Instability)	16
Figura 3-3. Parametrización grados de libertad (Figura Mechanical Instability)	17
Figura 3-4. Cálculo del centro de gravedad de la pala i. Esquema 2D	18
Figura 3-5. Movimiento de retraso colectivo de la pala (Figura Mechanical Instability)	24
Figura 3-6. Movimiento retrasado de corte de la pala (Figura Mechanical Instability)	24
Figura 3-7. Movimiento de retraso cíclico de la pala.Desplazamiento lateral (Figura Mechanical Instability)	25
Figura 3-8. Movimiento de retraso cíclico de la pala.Desplazamiento longitudinal (Figura Mechanical Instability)	25
Figura 4-1. Planos helicóptero EC-135	32
Figura 4-2. Uso del comando ode45	36
Figura 5-1. Curva de estabilidad	40
Figura 5-2. Ejemplo de los polos del sistema	41
Figura 5-3. Punto en la zona inestable del sistema	42
Figura 5-4. Polos del polinomio característico cuando el sistema es inestable (BP1)	42
Figura 5-5. Desplazamiento de las N palas del sistema BP1	43
Figura 5-6. Desplazamiento longitudinal del fuselaje BP1	44
Figura 5-7. Desplazamiento lateral del fuselaje BP1	44
Figura 5-8. Punto en la zona estable del sistema	46
Figura 5-9. Polos del polinomio característico cuando el sistema es estable (BP2)	46
Figura 5-10. Desplazamiento de las N palas del sistema BP2	47

Figura 5-11. Desplazamiento longitudinal del fuselaje BP2	47
Figura 5-12. Desplazamiento lateral del fuselaje BP2	48
Figura 6-1. Criterio de estabilidad literatura (Figura Mechanical Instability)	53

Notación

m_p	Masa de la pala
M_x	Masa del fuselaje en la dirección x
M_y	Masa del fuselaje en la dirección y
N	Número de palas
m_s	Momento estático de la pala
e	Distancia entre la cabeza del rotor y el centro de gravedad de una pala
R	Radio de la cabeza del rotor
I	Momento de inercia de la pala
K_δ	Constante de rigidez angular del adaptador
c_δ	Constante de amortiguamiento del adaptador
C_x	Constante de amortiguamiento del tren de aterrizaje en la dirección x
C_y	Constante de amortiguamiento del tren de aterrizaje en la dirección y
K_x	Constante de rigidez del tren de aterrizaje en la dirección x
K_y	Constante de rigidez del tren de aterrizaje en la dirección y
ω_x	Frecuencia natural del fuselaje en dirección x
ω_y	Frecuencia natural del fuselaje en dirección y
ω_f	Frecuencia natural del fuselaje genérica
Ω	Velocidad de giro del rotor
Ω_N	Velocidad crítica de giro del rotor
T	Energía cinética
D	Función de disipación
E_p	Energía potencial
q_i	Variable genérica (ecuaciones de Lagrange)
x	Desplazamiento longitudinal del fuselaje
y	Desplazamiento lateral del fuselaje
δ_i	Movimiento de retraso de la pala i
x_G	Coordenada x del centro de gravedad sistema rotor-palas
y_G	Coordenada y del centro de gravedad sistema rotor-palas
x_{Gpi}	Coordenada x del centro de gravedad de la pala i (ejes "1")
y_{Gpi}	Coordenada y del centro de gravedad de la pala i (ejes "1")
r_G	Vector del centro de gravedad de la pala i (ejes "0")
\cos	Función coseno
\sin	Función seno
A, B, C, D, E, F, G	Coeficientes del polinomio característico
M	Matriz de masa
K	Matriz de rigidez
C	Matriz de amortiguamiento

X	Vector de incógnitas
π	Número pi
Σ	Sumatorio
$\frac{dx}{dt}$	Derivada de x respecto al tiempo
$\frac{\partial y}{\partial x}$	Derivada parcial de y respecto a x
\geq	Mayor o igual

1 INTRODUCCIÓN

*El único lugar donde el éxito está antes que el trabajo
es en el diccionario.*

- Vince Lombardi -

En este primer capítulo del trabajo se va a hablar de las razones por las que se ha elegido realizar el trabajo sobre este tema, así como de los helicópteros y su funcionamiento, ya que es la aeronave afectada por este fenómeno y, por último, se verá como se ha estructurado el documento.

1.1 Motivación y objetivos

En la actualidad, ya hay numerosos estudios acerca de la resonancia en tierra, ya sean estudios más antiguos y pioneros en este sector como el trabajo de Coleman, que aún sigue siendo la base para estudiar dicho fenómeno, como trabajos más recientes, como el de Thomas Krynski y François Malburet, el cual ha sido la base principal para realizar este trabajo.

Obviamente, a los helicópteros no solo les afecta este tipo de vibración. Podríamos mencionar sin ir más lejos la resonancia en aire, que tiene un comportamiento similar a la resonancia en tierra en lo que a inestabilidad se refiere. No obstante, el estudio de otro tipo de vibraciones esta fuera del alcance de este trabajo, centrándonos exclusivamente en la resonancia en tierra.

Parece ilógico y casi imposible pensar que un helicóptero, es decir, una estructura resistente diseñada por profesionales cualificados y donde se ha invertido en su fabricación mucho dinero, pueda quedar reducida en cuestión de segundos a una estructura destrozada e inservible. Evidentemente, lo que alguien vería desde fuera como una autodestrucción casi sin sentido alguno provocada por el aumento de intensidad en las oscilaciones, tiene su explicación.

Hay vibraciones cuya energía proviene de la rotación del rotor y no de las fuerzas del aire. La resonancia en tierra es uno de estos tipos de vibración. Posteriormente se verá con más detalle como el acoplamiento de frecuencias si se da con un amortiguamiento suficiente estará dentro de la zona estable. En el lado contrario, estará en la zona inestable, y la vibración, en vez de amortiguarse con el tiempo, tenderá a incrementarse, lo cual, como ya se ha comentado, tendrá graves consecuencias.

Debido a su carácter destructivo debe haber o se deben tomar precauciones en la medida de lo posible para evitar la ocurrencia de dicho fenómeno. Lo que primero puede venir a la mente es que si la resonancia es en tierra, lo lógico es despegar y desaparecerá la vibración. Evidentemente, esto solucionaría el problema, pero se está dejando la suerte al factor humano, es decir, al piloto. Deben existir otras soluciones que no solo solucionen el problema cuando aparezca, sino que eviten que aparezca. Ya se ha mencionado la importancia del amortiguamiento en dicho fenómeno, por lo que parece lógico que si el helicóptero tiene el amortiguamiento adecuado, se podría evitar que apareciera este efecto. También hay que tener en cuenta la rigidez del mismo, pero todo esto se tratará más en detalle cuando se haga lo propio con el fenómeno, para una adecuada comprensión.

1.2 Helicópteros

Un helicóptero es, por definición, una aeronave más pesada que el aire y que, a diferencia del avión, se sostiene merced a una hélice de eje aproximadamente vertical movida por un motor, lo cual le permite elevarse y descender verticalmente.

Como hemos dicho, una de sus principales ventajas es el despegue y aterrizaje vertical, pero lo que le da además un plus extra es que lo hace con un requerimiento de potencia pequeño en comparación con otros sistemas VTOL (Vertical Take-Off Landing). También tiene la capacidad de mantener vuelo estacionario, al igual que antes para un requerimiento de potencia pequeño. Sin embargo, para el vuelo de avance necesita más potencia que un avión con el mismo peso.

Un helicóptero por lo general tiene dos rotores: el rotor principal y el rotor de cola. El rotor principal tiene tres funciones principalmente, las cuales son:

- Generar la fuerza sustentadora que permite compensar el peso
- Generar la fuerza propulsiva necesaria para contrarrestar la resistencia en vuelo de avance
- Generar las fuerzas y momentos que permiten el control del helicóptero

El movimiento global del rotor está compuesto por el movimiento del helicóptero y por su propio movimiento de rotación con una determinada velocidad angular.

El rotor de cola o rotor antipar sirve principalmente para generar el par necesario que contrarreste el par generado por el rotor principal. Por último mencionar, que aunque la configuración clásica es esta, existen configuraciones especiales donde no se tiene rotor antipar o donde coexisten varios rotores principales.

El rotor principal posee varias configuraciones como son monorrotores, birrotores, entrelazados, en tándem o multirrotores. Habiendo ya nombrado las funciones del rotor principal, decir que las dos primeras son consecuencia de la fuerza que genera realmente el rotor, llamada tracción, la cual se descompone en la fuerza sustentadora y en la fuerza propulsiva. El rotor principal habitualmente está compuesto por dos o más palas, dependiendo de los requerimientos del helicóptero.

Los helicópteros tienen una gran versatilidad en la función que pueden realizar, sirviendo por ejemplo tanto para operaciones militares, como antiincendio o para operaciones de salvamento. Las principales desventajas que presenta un helicóptero frente a un avión serían la reducida velocidad que pueda alcanzar un helicóptero en comparación, la menor autonomía que éste tiene (tiempo que puede mantenerse una aeronave en el aire), que no puede alcanzar alturas tan elevadas como las que alcanza un avión o su compleja fabricación.

No obstante, poseen ciertas características que le hacen imprescindible en diversos campos y que le otorgan una gran versatilidad, como se ha mencionado anteriormente. La ventaja principal es su despegue y aterrizaje verticales, lo cual le permite establecerse casi en cualquier sitio, desde la azotea de un rascacielos hasta la cima de una montaña. Esto le otorga una gran maniobrabilidad, aunque no es solo esto lo que se la otorga, sino que puede moverse muy lentamente o incluso mantenerse estático en el aire, lo que le otorga funciones ya nombradas como en operaciones de salvamento. También es una aeronave más inestable que un avión. Esto no quiere decir que un helicóptero no sea fiable o seguro, pues si lo es, sino que al tener una maniobrabilidad superior esto conlleva una mayor inestabilidad o un mayor movimiento en el mismo como norma general.

A continuación, también se va a ver en esta breve introducción sobre helicópteros los mandos de vuelo que tiene y una pequeña explicación de para qué sirve cada uno.

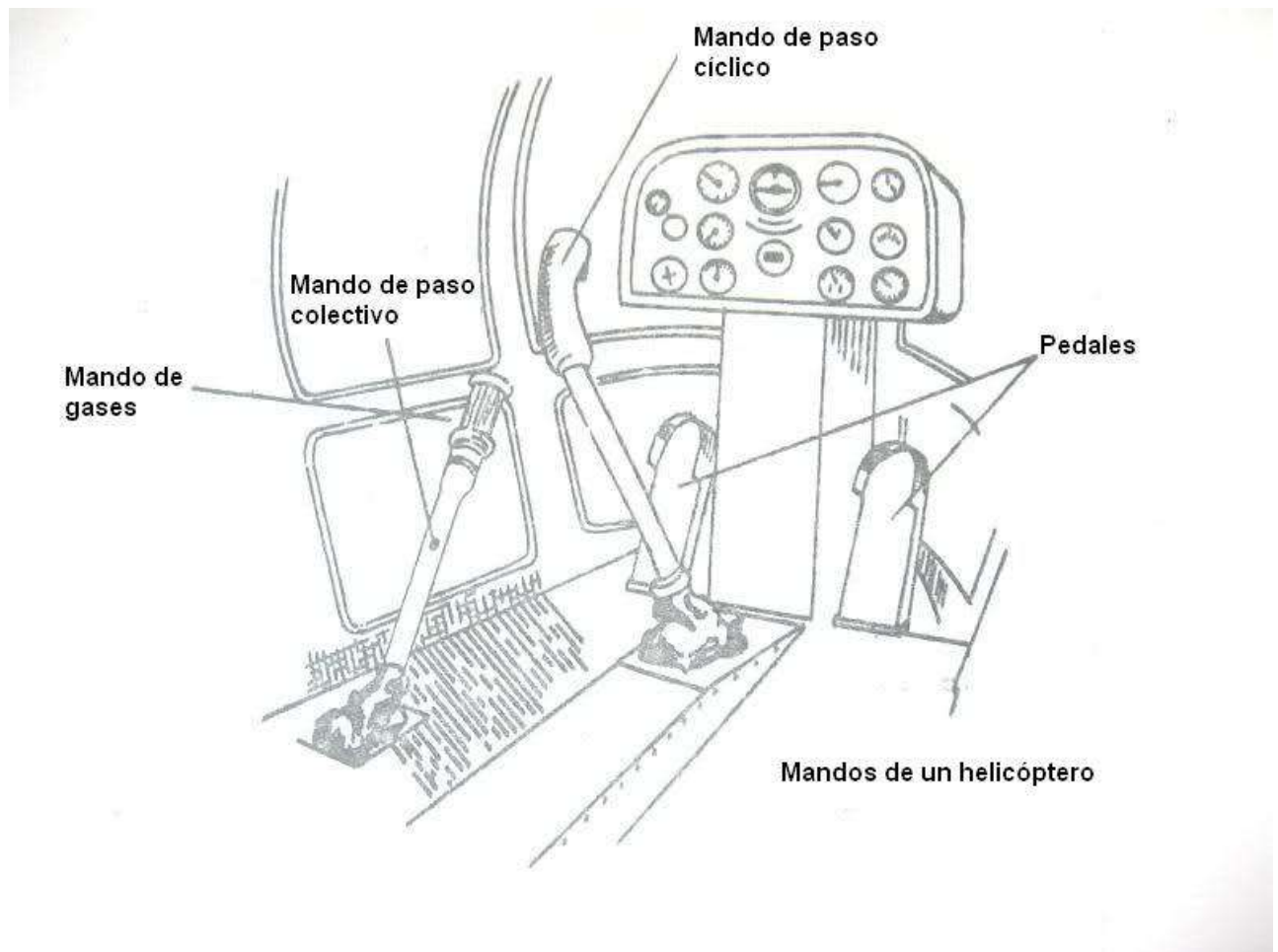


Figura 1-1. Mandos de vuelo de un helicóptero

Como vemos en la figura anterior, un helicóptero tiene cuatro mandos de vuelo para controlar todo su funcionamiento, los cuales son:

- Mando de gases: Sirve para mantener constante la velocidad de giro del rotor al variar el paso colectivo. Suele ir situada en el extremo de la palanca de paso colectivo
- Palanca de paso colectivo: Es la responsable del desplazamiento vertical del helicóptero, aumentando o disminuyendo la sustentación del rotor principal, modificando el paso de cada pala.
- Palanca de paso cíclico: Proporciona el control longitudinal y lateral adecuado.
- Pedales: Proporcionan guiñada o control direccional, modificando el empuje del rotor de cola o del dispositivo antipar correspondiente.

Como vemos, el helicóptero es una aeronave muy útil y permite hacer tareas que un avión no te permite, igual que ocurre al contrario, por lo que queda claro la necesidad de ambas. En términos de tipología de aeronaves, mencionar que el helicóptero se clasifica como un aerodino (aeronaves más densas que el fluido en el que se mueven) y, dentro de los aerodinos, está clasificado dentro del grupo con motor y de alas giratorias, al igual por ejemplo que los girodinos.



Figura 1-2. Helicóptero EC-135

1.2.1 Tipos de rotores

También vamos a hacer una breve reseña sobre los tipos de rotores que se pueden usar en un helicóptero, ya que esto también influye en la presencia o no de la resonancia en tierra. Los rotores pueden clasificarse en cuatro tipos:

- **Rotor articulado:** Fueron los primeros rotores prácticos, fruto del español Juan de la Cierva. Constan de tres o más palas. En el rotor articulado las palas se encuentran sujetas al mástil mediante dos articulaciones, una en el plano de rotación y otra perpendicular al mismo. Cada pala, entonces, puede moverse hacia arriba y abajo respecto del plano de giro individualmente y también adelantarse o atrasarse respecto de su sentido de giro.
- **Rotor semi-rígido:** Fue, junto al rotor articulado, el más utilizado en los comienzos. Era el tipo ideal para helicópteros y autogiros experimentales, así como para helicópteros ultralivianos. Se permite a las palas un ligero batimiento vertical. Usado exclusivamente en configuraciones bipala, de manera que cuando la pala que avanza asciende disminuyendo la sustentación y el ángulo de ataque, la que retrocede desciende, equilibrando esta asimetría en la sustentación.
- **Rotor rígido:** Estos rotores carecen de toda articulación por lo que la flexibilidad de las palas se convierte en algo decisivo y toma el lugar de las articulaciones. El único movimiento permitido mediante rodamientos es el de cambio del ángulo de paso. Permiten un amplio margen en los corrimientos del centro de gravedad de la aeronave, ya que el propio rotor compensa este desequilibrio mediante un momento resultante.
- **Rotor flexible:** Sucesor del rotor articulado, tiene un funcionamiento muy similar. Ha ido desplazando lentamente a los otros tipos de rotores. La diferencia que presentan respecto a los rotores articulados es que eliminan las articulaciones mediante el uso de materiales flexibles, que simulan los movimientos de batimiento y también el de adelanto-atraso de las palas. Estos materiales son principalmente elastómeros y vigas construidas en titanio o fibra de vidrio. El rango del cambio de centro de gravedad permisible en este tipo de rotores es intermedio al de rotores articulados y rotores rígidos.

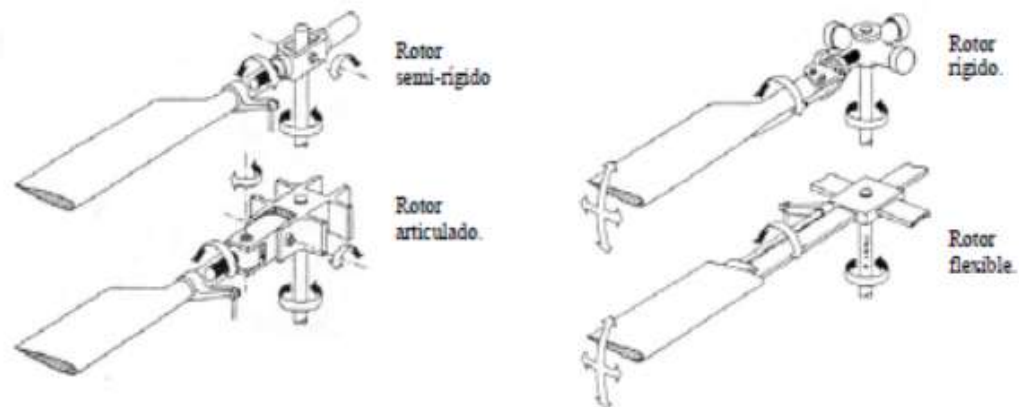


Figura 1-3. Tipos de rotores

1.3 Estructura del documento

Primero, en esta introducción se ha comentado de manera breve el fenómeno que se va a estudiar y por qué, así como también se ha hablado del funcionamiento de un helicóptero y los tipos de rotores que existen, ya que es la aeronave donde se produce dicho fenómeno y, el tipo de rotor, influye en que se pueda dar o no la aparición del mismo.

Después se ha continuado con una explicación de la resonancia en tierra en profundidad, comentando por qué se produce, en qué condiciones, como se puede evitar, etc. Una vez estudiado el fenómeno en un marco teórico, se ha deducido un modelo propuesto por Thomas Krynski y François Malburet, con el fin de estudiar el fenómeno en un marco práctico.

Una vez deducido el modelo, se propone un análisis numérico del mismo vía Matlab. Se calcula la curva de estabilidad del sistema y, en base a ella, se eligen dos bloques de parámetros para la simulación, uno perteneciente a la zona estable y otro en la zona inestable, estudiando el comportamiento del fenómeno.

Por último, usando la transformación de Coleman, se puede hacer un estudio analítico del sistema, que nos permite comparar un criterio de estabilidad analítico propuesto en la literatura con el obtenido previamente numéricamente.

El documento acaba con un anexo donde se incluyen los programas usados para el análisis numérico en Matlab.

2 MARCO TEÓRICO

*Sabemos lo que somos, pero no lo que podemos
llegar a ser*

-William Shakespeare-

Durante parte de la Segunda Guerra Mundial, los helicópteros diseñados para uso militar, mientras se les realizaba un test en tierra, exhibieron una inestabilidad del rotor en forma de violentas oscilaciones que ponían en serio peligro la vida del mismo. Esta inestabilidad fue primero atribuida a las palas del rotor, pero un análisis más cuidadoso indicó que era causado por, hasta el momento, un fenómeno desconocido, en el cual la energía rotacional del rotor se convertía en energía oscilatoria de las palas. Este fenómeno era especialmente crítico cuando se operaba sobre o cerca de tierra, por lo que fue llamado resonancia en tierra.

Los intentos de eliminar dicho fenómeno llevaron en varias ocasiones a extensas modificaciones en el diseño de los helicópteros. Esto forzó a los ingenieros (destacamos el trabajo de los ingenieros de la Unión Soviética B. Ya. Zhrebtsov y A.I.Pozhalostin así como el trabajo de Coleman ya mencionado) a realizar diversos estudios teóricos así como investigaciones experimentales que permitieran determinar las causas de la ocurrencia del fenómeno y también los medios que había que implementar para que no hubiera la posibilidad de aparición de dicha inestabilidad.

2.1 Introducción a la Resonancia en Tierra

El fenómeno de la resonancia en tierra es uno de los más importantes y peligrosos que pueden ocurrir en un helicóptero. Este es autosostenido por el acoplamiento entre el movimiento de las palas y el movimiento de la aeronave sobre su tren de aterrizaje. La aeronave empezará a ser inestable dependiendo de la velocidad de giro del rotor. En sistemas rotatorios apoyados en un soporte flexible, se ha observado que dicha inestabilidad es muy destructiva.

Mencionar que una inestabilidad de este tipo fue primero observada en giroplanos y helicópteros en forma de violentas oscilaciones de balanceo y, menos frecuentemente, de cabeceo. Lo segundo aparece cuando la aeronave está en tierra. La resonancia en tierra no involucra resonancia vibratoria, pero sí comportamiento inestable.

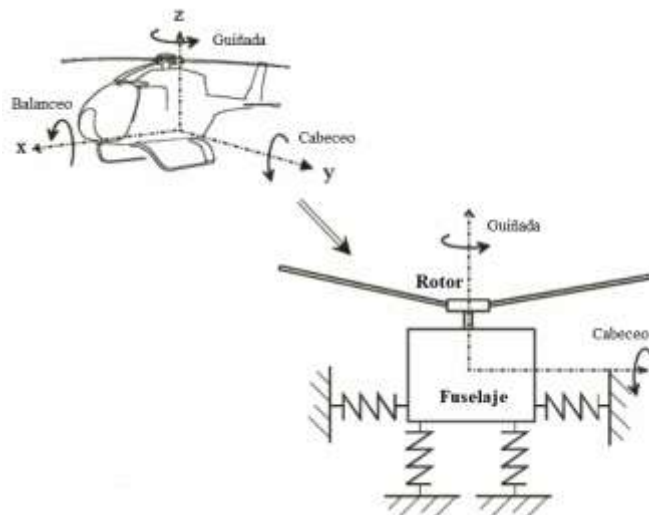


Figura 2-1. Esquema Helicóptero (Figura Mechanical Instability).

Como se puede observar en la figura anterior, el tren de aterrizaje ha sido modelado por muelles. Este hecho se usará posteriormente a la hora de obtener las ecuaciones del modelo y, asumiendo también linealidad, se podrá calcular la energía potencial asociada al tren de aterrizaje y la rigidez que aporta al sistema.

Esta inestabilidad es causada por el acoplamiento del movimiento de las palas en el plano de rotación y el movimiento del fuselaje, normalmente en el eje de balanceo, aunque no siempre es así. Este acoplamiento se traduce o se expresa como una condición de igualdad entre las frecuencias naturales del fuselaje y de las palas y de la velocidad de giro del rotor, como veremos a continuación.

Numerosas investigaciones realizadas sobre la resonancia en tierra han llevado a determinar cual es la esencia física del fenómeno. Durante el aterrizaje, existen vibraciones naturales de las palas del rotor relativo a las bisagras del mismo (que pueden deberse a ráfagas de viento, aterrizaje brusco...). Esto provoca que aparezcan fuerzas de inercia en el plano de rotación del rotor. Transmitiéndose dicha fuerza al fuselaje, provoca el movimiento del mismo. Las fuerzas oscilatorias del helicóptero varían con una frecuencia determinada en función de la frecuencia natural de las palas en el plano de rotación y con la velocidad angular de rotación del rotor. Cuando se produce la condición anterior, es decir, cuando se produce el acoplamiento de movimientos, o cuando la frecuencia de oscilación de las fuerzas de inercia es cercana a la frecuencia natural del fuselaje sobre el tren de aterrizaje, el helicóptero oscila más fácilmente. Dicho movimiento provoca el movimiento de las palas que, bajo los efectos de inercia ya mencionados, actúan sobre el fuselaje. Es decir, sobre el fuselaje actúa una fuerza de inercia, que provoca más movimiento del fuselaje. Al provocar más movimiento se vuelve a repetir el mismo suceso. El fuselaje vuelve a mover la cabeza del rotor, pero debido al aumento en el movimiento del fuselaje, este desplazamiento es mayor, y dicho desplazamiento de la cabeza del rotor se vuelve a transmitir a cada una de las palas. Obviamente la fuerza de inercia que se ejerce sobre el fuselaje es cada vez mayor, aumentando por lo tanto la intensidad del movimiento, convirtiéndose en oscilaciones muy violentas que acabarán con la vida del helicóptero si no se le pone fin a tiempo. La fuerza de inercia que se produce es debida al desplazamiento del centro de gravedad del rotor. Se explicará esto un poco más en detalle al hablar de la transformación de Coleman. En resumen, el giro del centro de gravedad alrededor del centro de rotación provoca la aparición de fuerzas de inercias, que se transmiten al fuselaje y así sucesivamente. Esta oscilación será más o menos fuerte en función de las frecuencias naturales de las palas y el fuselaje y de la velocidad de giro del rotor.

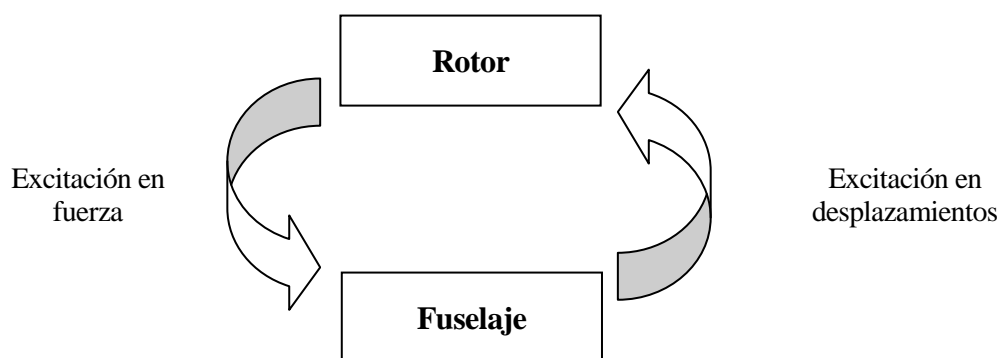


Figura 2-2. Esquema del acoplamiento de movimientos

Mencionar que el estudio que se ha llevado aquí acerca de la teoría de la resonancia en tierra solo es válido para un número de palas igual o mayor que 3. El estudio de un rotor con solo 2 palas tiene algunas peculiaridades que deben ser tenidas en cuenta en el análisis y hacen que dicho análisis adquiera una complejidad superior al estudio llevado a cabo en este trabajo.

2.1.1 Condiciones

Esta inestabilidad aparece solamente bajo ciertas condiciones solamente. Si tomamos los distintos elementos que componen el sistema por separado, tenemos que el fuselaje tiene una frecuencia natural ω_f y que cada pala tiene otra frecuencia natural ω_s . En un sistema de referencia estático, con el rotor rotando a una velocidad Ω , la velocidad de giro vista por el fuselaje es $\Omega - \omega_s$ (composición de velocidades angulares). Por tanto, una

condición necesaria, que no suficiente, es que la velocidad vista por el fuselaje sea igual a su frecuencia natural, escribiendo dicha condición como:

$$\omega_f = \Omega - \omega_\delta \quad (2-1)$$

En realidad, esta condición habría que ponerla en valor absoluto, ya que hay un acoplamiento que sería estable y otro acoplamiento que sería inestable. Esto va a depender del amortiguamiento, que debe ser tenido en cuenta a la hora de evaluar cuando se producirá el acoplamiento inestable y como consecuencia el fenómeno bajo estudio. También hay que tener en cuenta que esta expresión es teórica, es decir, que en la práctica la relación (2-1) no se tiene que satisfacer exactamente. Ésta indica que cuando más cerca este de cumplirse la igualdad, las oscilaciones que aparezcan crecerán más fácilmente.

Sabiendo que tanto el amortiguamiento como la frecuencia ω_δ son función de la velocidad de giro Ω del rotor (esto se podrá ver con claridad cuando se obtenga el modelo y se obtenga dicha dependencia), queda patente la necesidad de analizar el amortiguamiento y las frecuencias naturales en función del cambio de Ω , donde se podrá observar también lo mencionado previamente sobre las dos parejas existentes de acoplamientos, que evaluándolo conjuntamente con el amortiguamiento, permitirá distinguir ambos acoplamientos.

Para realizar este análisis se va a utilizar un diagrama que presenta con claridad lo dicho anteriormente. Una vez se haya visto el diagrama, se comentará el mismo con el fin de que queden claras las condiciones necesarias para que se produzca la resonancia en tierra en un helicóptero.

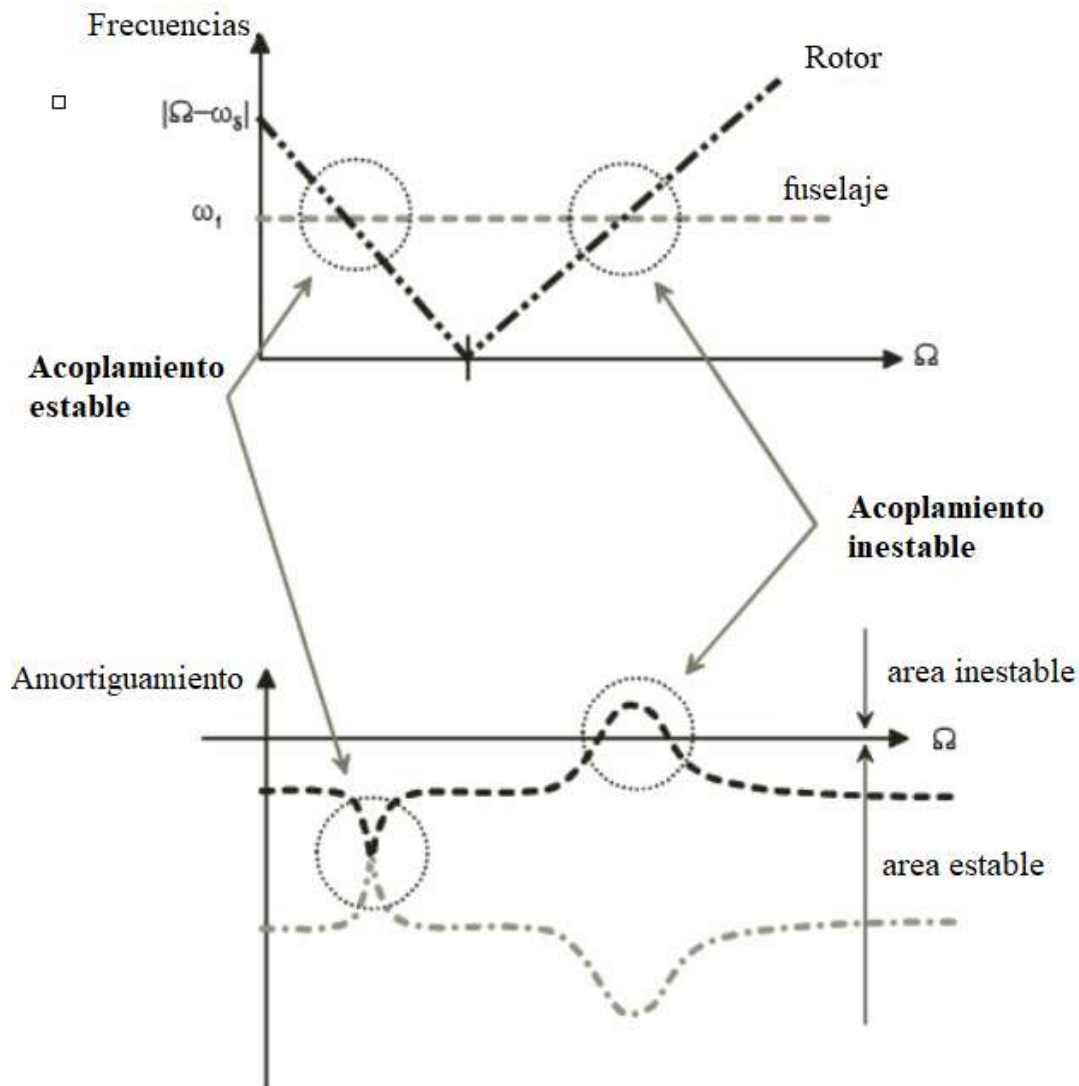


Figura 2-3. Diagrama Resonancia en Tierra. Frecuencia y amortiguamiento cambian como función de la velocidad de giro del rotor (Figura Mechanical Instability)

En este diagrama se puede observar que la frecuencia natural del fuselaje no varía con la velocidad de giro del rotor (esto se verá también con la obtención del modelo), pero si lo hace la frecuencia natural de las palas, dando lugar a los acoplamientos ya citados.

Vemos que el acoplamiento inestable se da con mayor velocidad de rotación. Esto es debido a que el amortiguamiento disminuye con dicha velocidad, provocando que las vibraciones superen al amortiguamiento que debería hacer que éstas en vez de aumentar, disminuyeran. Cuando el amortiguamiento es lo suficientemente grande, es capaz de disminuir las vibraciones que se producen en el sistema (mediante el análisis numérico que se realizará podremos ver un ejemplo de esto aumentando el amortiguamiento).

Lo que queda claro sobretodo de este diagrama, además de lo que se acaba de decir, es que la velocidad Ω_N (llamamos así a la velocidad que da lugar al acoplamiento inestable) debe ser evitada.

2.1.2 Soluciones contra la resonancia en tierra

En el apartado anterior se ha visto que a una determinada velocidad de rotación del rotor llamada Ω_N es cuando se producirá el acoplamiento inestable y con ello el comienzo de la resonancia en tierra, por lo que se ha llegado a la conclusión de que para que eso no se produzca, hay que evitar dicha velocidad, es decir, lo idóneo es situar dicha velocidad fuera del rango de velocidades a las que puede operar el helicóptero.

Ovbiamente, esto no es tan sencillo ya que sino los helicópteros actuales no deberían presentar dicho problema y se han dado casos en los que ha aparecido el ya mencionado fenómeno. Sin embargo, dependiendo del helicóptero y el resto de parámetros del mismo, la velocidad de giro Ω_N podrá estar fuera del rango de operación normal o estar lo más alejada posible.

Para este propósito, la frecuencia natural del fuselaje ω_f o la de las palas ω_δ pueden ser modificadas. Tendríamos así la solución más convencional a adoptar que consistiría en modificar lo siguiente:

- Las características del rotor, a través de modificar la rigidez del adaptador instalado entre la cabeza del rotor y la pala, para impedir que exista ninguna coincidencia en la curva de operación del rotor (en la Figura 2-3 se ve dicha curva y la coincidencia referida, siendo el objetivo eliminar dicha coincidencia, como se verá a continuación)
- Las características del tren de aterrizaje, en orden de establecer las frecuencias naturales del fuselaje (en x y en y) sobre su tren de aterrizaje. Modificando la rigidez aportada por el tren de aterrizaje se podrían cambiar dichas frecuencias hacia unos valores adecuados.

Estas relaciones se van a esclarecer en el modelo y se van a ver como dependen los parámetros mencionados anteriormente.

Hay por lo tanto dos métodos para impedir que se dé el fenómeno de resonancia en tierra, modificando dichas características en el rotor o en el tren de aterrizaje, ya que ambas influyen en la rigidez o el amortiguamiento total del sistema:

- Aumentar el amortiguamiento
- Modificar la rigidez

En la siguiente figura se va a poder observar con nitidez el efecto que tienen tanto la rigidez, como el amortiguamiento.

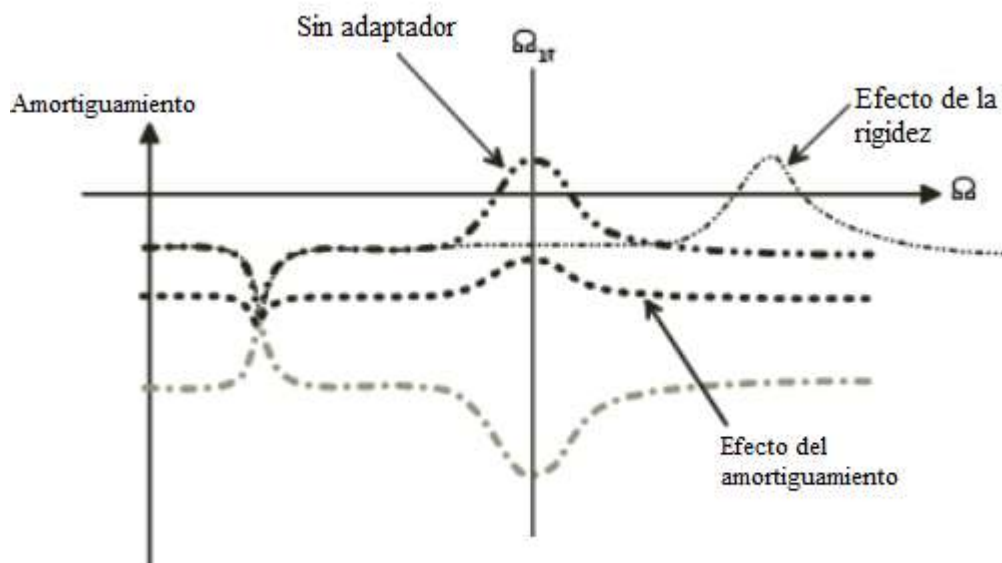


Figura 2-4. Efecto del amortiguamiento y de la rigidez (Figura Mechanical Instability)

En esta figura se puede observar que con un aumento de la rigidez del sistema se puede conseguir que la velocidad de giro Ω_N , la cual ha sido determinada como velocidad crítica, no esté entre el rango de operación normal de vuelo del helicóptero.

Por otro lado, se puede ver también el efecto que tiene el amortiguamiento. Si tenemos más amortiguamiento, es decir, más capacidad para disminuir con el tiempo una fuerza que se presente, aunque se produzca dicha coincidencia de velocidades indeseable, si el amortiguamiento es suficientemente grande, no pasará del área estable al área inestable (véase Figura 2.3).

El modelo que se va a trabajar es un modelo teórico, por lo que se pueden introducir valores de amortiguamiento tan elevados como se desee, y como veremos esto conducirá a una disminución de la vibración a lo largo del tiempo que sería lo deseado. Sin embargo, estos valores de amortiguamiento son difícilmente alcanzables en la realidad e, introduciendo en el programa valores más realísticos se verá como, a partir de cierto momento, las oscilaciones crecen considerablemente, fiel reflejo de lo que ocurre en la realidad.

También es cierto que una estimación de los valores de las constantes de amortiguamiento (también de las de rigidez) es compleja, por lo que los valores que se introducirán no serán todo lo precisos que debieran y valdrían tanto valores superiores como inferiores y quizá, alguno de esos valores superiores, en función del helicóptero en cuestión, ser capaz de mitigar las oscilaciones que provoca el fenómeno bajo estudio.

Estas acciones relacionadas con la rigidez y el amortiguamiento serían acciones preventivas y deberían ser tenidas en cuenta en el diseño de un helicóptero. Una vez diseñado el helicóptero, este tendrá una rigidez y un amortiguamiento determinados, por lo que si se llegará a dar el fenómeno de la resonancia en tierra significaría que dicho helicóptero no tiene ni la suficiente rigidez ni el suficiente amortiguamiento como para evitar su ocurrencia.

En este caso, que el helicóptero no acabe destrozado dependería única y exclusivamente del piloto. Podríamos distinguir dos posibles escenarios:

- Si la velocidad de giro del rotor Ω es baja, la solución sería cerrar el acelerador inmediatamente y bajar completamente la palanca de paso colectivo, colocando las palas en un paso bajo.
- Si la velocidad de giro del rotor Ω está en el rango de operación normal, la solución es despegar consiguiendo disminuir las oscilaciones. Se debe esperar un tiempo prudente a que las palas vuelvan a la normalidad o si se intenta volver a aterrizar antes de esto la inestabilidad se agravaría y volvería a comenzar pero con más intensidad.

Estas dos opciones dependen del factor humano y obviamente serían ya en última instancia si comenzará la

inestabilidad. Lo ideal es que el helicóptero tenga valores correctos de amortiguamiento y rigidez, dentro de la dificultad de diseñar y fabricar un helicóptero, en el cual existen limitaciones de varias índoles.

Mencionar también que se puede forzar la ocurrencia del fenómeno actuando de una determinada forma en los mandos de vuelo. Esto se realiza normalmente sobre helicópteros modificados que difieren de la versión original. Se modifican con este objetivo, es decir, el de realizar test que permitan estudiar el comportamiento y sacar las conclusiones pertinentes. Algunos resultados que se pueden extraer de estos test es por poner un ejemplo, que la excitación del fuselaje reduce la frecuencia natural de la aeronave sobre su tren de aterrizaje. También debido a la no linealidad de la rigidez, se pueden obtener varios valores de rigidez en función de la amplitud de la excitación que el piloto provoca. Pequeños movimientos dan altos valores de rigidez y grandes movimientos dan valores bajos de rigidez.

Hay que tener en cuenta que estos test experimentales son realizados sobre helicópteros modificados para este propósito ya que lo normal es que los límites de estabilidad sean suficientemente amplios para estar protegidos antes este fenómeno, dependiendo estos límites de la rigidez y el amortiguamiento.

Con todos estos datos que se han ido extrayendo del estudio teórico del fenómeno, se van a condensar las ideas fundamentales y se va a sintetizar toda la información anterior para asegurar una mejor comprensión del mismo.

Lo primero que se produciría sería el acoplamiento de movimientos de acuerdo a la relación (2-1). Cuando se produce dicho acoplamiento, sino se tienen valores adecuados de rigidez y amortiguamiento, dará comienzo la inestabilidad que caracteriza la resonancia en tierra que irá creciendo con el tiempo y, en cuestión de segundos, dejará paso a violentas oscilaciones sino se le pone remedio a tiempo. Estas oscilaciones son autosostenidas, provocadas por la rotación del centro de gravedad en torno al eje de rotación, que provoca la aparición de fuerzas de inercia y el consecuente movimiento del fuselaje y así sucesivamente, aumentando rápidamente con el tiempo. En el momento en que ocurre, el piloto deberá actuar con celeridad antes de que sea demasiado tarde o bien bajando el paso de las palas o despegando en el caso más normal, dependiendo dicha decisión de la velocidad de giro del rotor.

2.2 Casos de Resonancia en Tierra

En este apartado se van a comentar diversos episodios en los que un helicóptero se ha visto afectado por un caso de resonancia en tierra.

Un caso reciente (2012) fue cuando el helicóptero modelo Helibras HB-350BA Esquilo (una variante del Eurocopter AS350 que usa la Fuerza Aérea de Brasil) quedo partido en dos al sufrir este episodio. A continuación podemos ver una imagen de como quedo dicho helicóptero tras el suceso.



Figura 2-5. Helibras HB-350BA después de un episodio de resonancia en tierra [18]

Podemos observar a continuación un Boeing CH-47 Chinook, el cual es un helicóptero de transporte de carga pesada, bimotor con rotores en tándem de origen estadounidense. En la siguiente imagen vemos como queda después de un ensayo de resonancia en tierra.



Figura 2-6. Boeing CH-47 Chinook después de un test de resonancia en tierra [19]

Otro caso sería el helicóptero Schweizer 269C N2196F, el cual quedó del siguiente modo al verse afectado por un episodio de resonancia en tierra.



Figura 2-7. Schweizer 269C N2196F después de un episodio de resonancia en tierra [20]

Por último, también podríamos comentar el incidente acaecido en 1986 durante el rodaje de un capítulo de la serie estadounidense MacGyver, donde el piloto se dio cuenta a tiempo de que estaba comenzando un episodio de resonancia en tierra y fue capaz de despegar antes de que fuera tarde. [21]

3 MODELO DE MÍNIMOS GRADOS DE LIBERTAD

El coraje es ir de fracaso en fracaso sin perder el entusiasmo.

- Winston S.Churchill -

Para el estudio de dicho fenómeno se hace patente la necesidad de un modelo. Obviamente es un fenómeno complejo, el cual se podría estudiar con más grados de libertad de los considerados aquí, pero por esto mismo, es decir, por su grado de complejidad, se propone un modelo con el mínimo grados de libertad posible.

3.1 Planteamiento del modelo

Los grados de libertad del modelo serán los grados de libertad que consideremos tanto de las palas como del fuselaje. Como ya hemos dicho, se pueden considerar más de los que se van a considerar, pero la complejidad sería entonces muy elevada.

3.1.1 Movimiento de retraso

En las palas se va a considerar únicamente el movimiento de retraso controlado por la variable δ_i asociada a cada pala. Nótese que otro grado de libertad sería considerar que las palas no permanecen en el plano horizontal del rotor y por lo tanto habría otro ángulo a medir para su movimiento vertical. No obstante, solo se va a tener en cuenta el grado de libertad δ_i , por lo que tendremos más o menos grados de libertad asociados a las palas en función del número de palas N que tengamos. Se van a considerar cuatro palas, por lo que tendremos cuatro variables asociadas a las palas.

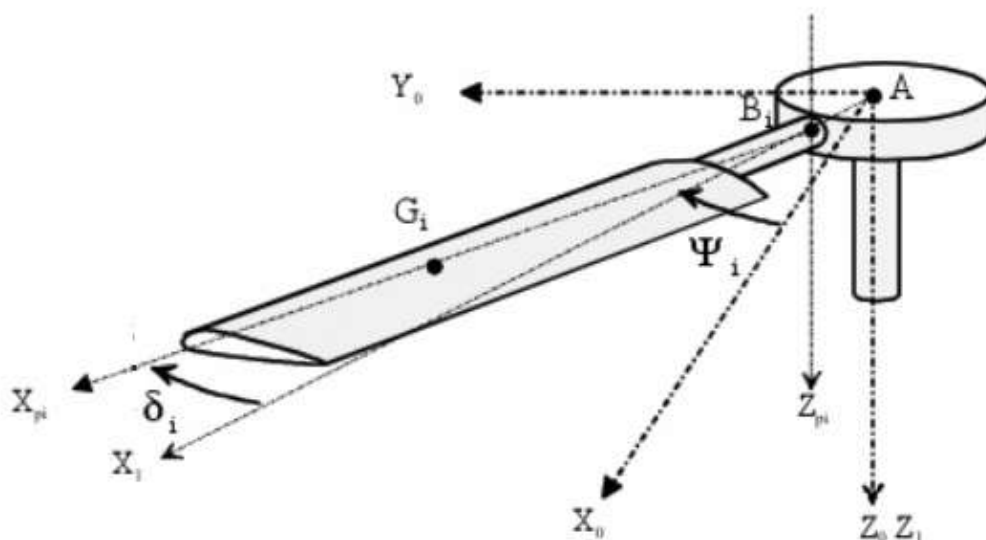


Figura 3-1. Grado de libertad δ_i asociado a cada pala (Figura Mechanical Instability)

Se definen los siguientes sistemas de referencia:

- $R_g(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ Sistema de referencia ligado a tierra
- $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ Sistema de referencia ligado al fuselaje
- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ Sistema de referencia ligado al rotor
- $R_{pi}(B_i, \vec{x}_{pi}, \vec{y}_{pi}, \vec{z}_{pi})$ Sistema de referencia ligado a la pala i

Como podemos observar, la variable δ_i se define por el ángulo que forman los sistemas de referencia de las palas respecto al del rotor, midiendo su movimiento respecto al mismo.

También aparece otro ángulo ψ_i , definido para cada pala, y el cual es función del tiempo. Si el rotor está girando a una velocidad constante Ω y suponemos cada pala separado un mismo ángulo de las dos palas más próximas, este ángulo se define como:

$$\psi_i(t) = \Omega t + 2\pi \frac{i-1}{N} \quad (3-1)$$

Por lo que en nuestro caso donde se ha supuesto $N=4$, las palas están separadas un ángulo de 90° . Esto va a ser de vital importancia a la hora de calcular diversos sumatorios que aparecen a la hora de hallar las ecuaciones del modelo.

3.1.2 Movimiento lateral y longitudinal

En el fuselaje se va a considerar un movimiento contenido dentro de un plano perpendicular al eje de rotación. Por tanto, el movimiento del fuselaje sobre el tren de aterrizaje se va a medir a partir del movimiento de la cabeza del rotor (punto A) respecto al punto O del sistema de referencia ligado a tierra. Por lo tanto, vamos a tener 2 variables más. La variable x medirá el movimiento longitudinal y la variable y medirá el movimiento lateral. Está claro que el grado de libertad no considerado es el movimiento vertical al considerar el movimiento contenido en un plano horizontal. Para pequeños desplazamientos esta hipótesis es acertada, que es lo que consideramos por simplicidad, a pesar de que sea un fenómeno que pueda provocar desplazamientos considerables. Sin embargo, estamos interesados en los pequeños desplazamientos que no pondrían en peligro la vida del helicóptero.

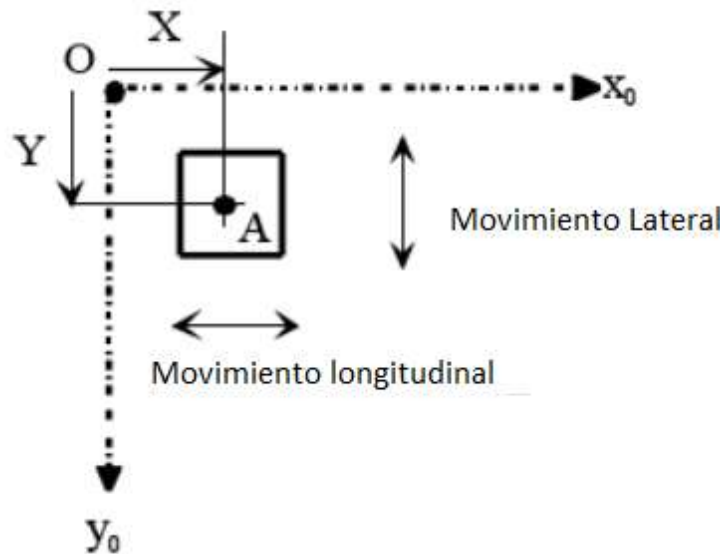


Figura 3-2. Grados de libertad x e y asociados al fuselaje (Figura Mechanical Instability)

Por último, se adjunta a modo de resumen una parametrización de los grados de libertad considerados en el modelo.

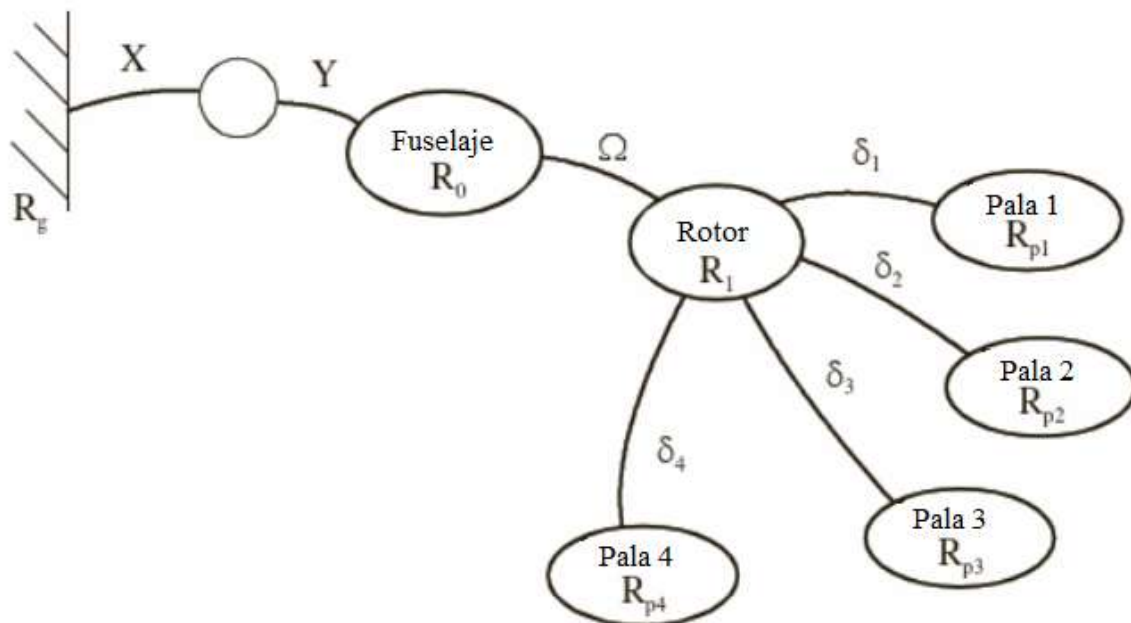


Figura 3-3. Parametrización grados de libertad (Figura Mechanical Instability)

Esta esquematización es bastante útil pues condensa de forma clara todo lo expuesto anteriormente. Los grados de libertad existentes y a que parte del sistema están asociados, así como sus respectivos sistemas de referencia.

3.2 Deducción de las ecuaciones

Las ecuaciones del movimiento serán obtenidas mediante la aplicación de la ecuación de Lagrange, la cual es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (3-2)$$

Los términos que aparecen son la energía cinética (T), la energía potencial (E_p) y la función de disipación (D), las cuales van a ser calculadas respecto al sistema de referencia ligado a tierra.

3.2.1 Energía cinética, potencial y disipativa

La energía cinética total del sistema es la suma de las respectivas contribuciones de las palas y del fuselaje, las cuales se analizarán por separado.

La energía cinética del fuselaje viene dada, considerando una masa M_x a lo largo del eje x y una masa M_y a lo largo del eje y, por la siguiente expresión:

$$T_{fus} = \frac{1}{2} M_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_y \dot{y}^2 \quad (3-3)$$

La energía cinética de las palas tiene una expresión bastante más compleja que requiere previamente del cálculo del centro de gravedad de la pala para calcular su correspondiente velocidad.

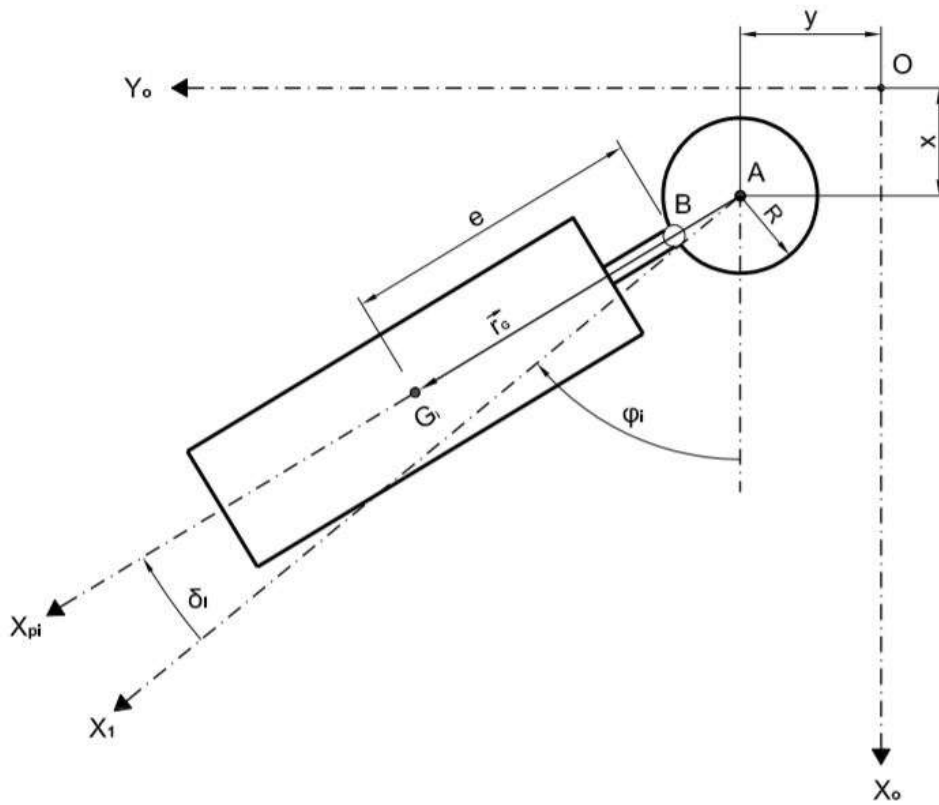


Figura 3-4. Cálculo del centro de gravedad de la pala i. Esquema 2D

Basándonos en la figura 3-4, podemos determinar que el centro de gravedad de cada pala es:

$$\vec{r}_G = \begin{pmatrix} x + R \cos \psi_i + e \cos(\psi_i + \delta_i) \\ y + R \sin \psi_i + e \sin(\psi_i + \delta_i) \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

Derivando obtenemos la velocidad del centro de gravedad:

$$v_G = \begin{pmatrix} \dot{x} - R\Omega \sin \psi_i - e(\dot{\delta}_i + \Omega) \sin(\psi_i + \delta_i) \\ \dot{y} + R\Omega \cos \psi_i + e(\dot{\delta}_i + \Omega) \cos(\psi_i + \delta_i) \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

Es de vital importancia calcular el cuadrado de la misma para la energía cinética. El valor buscado es:

$$\begin{aligned} v_G^2 = & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\Omega^2 + e^2(\dot{\delta}_i + \Omega)^2 + 2\Omega R(\dot{y} \cos \psi_i - \dot{x} \sin \psi_i) \\ & - 2\dot{x}e(\dot{\delta}_i + \Omega)(\sin \psi_i \cos \delta_i + \sin \delta_i \cos \psi_i) \\ & + 2\dot{y}e(\dot{\delta}_i + \Omega)(\cos \psi_i \cos \delta_i - \sin \psi_i \sin \delta_i) + 2\Omega Re(\dot{\delta}_i + \Omega) \cos \delta_i \end{aligned} \quad (3-6)$$

Con este valor ya podemos determinar la energía cinética de las palas, la cual es un sumatorio para tener en cuenta todas las palas:

$$\begin{aligned}
T_p = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_p \big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \Omega^2 + e^2 (\dot{\delta}_i + \Omega)^2 + 2\Omega R (\dot{y} \cos \psi_i - \dot{x} \sin \psi_i) \\
- 2\dot{x}e(\dot{\delta}_i + \Omega)(\sin \psi_i \cos \delta_i + \sin \delta_i \cos \psi_i) \\
+ 2\dot{y}e(\dot{\delta}_i + \Omega)(\cos \psi_i \cos \delta_i - \sin \psi_i \sin \delta_i) + 2\Omega R e(\dot{\delta}_i + \Omega) \cos \delta_i \big)
\end{aligned} \quad (3-7)$$

Una vez calculada la energía cinética del sistema, pasamos a centrarnos en la energía potencial y función de disipación referida a las palas. Hay instalado un adaptador entre las palas y la cabeza del rotor que proporciona tanto rigidez como amortiguamiento. La rigidez del adaptador se modela como un resorte torsional perfecto con constante de rigidez angular K_δ . La energía potencial asociada es:

$$E_p = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} K_\delta \delta_i^2 \quad (3-8)$$

El amortiguamiento proporcionado por el adaptador es modelado como un amortiguamiento angular de tipo viscoso, con constante característica c_δ , con lo que la función de disipación es:

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_\delta \dot{\delta}_i^2 \quad (3-9)$$

Por último, mencionar que se ha considerado que todos los adaptadores montados en el rotor se asumen idénticos, por lo que podemos expresar como se ha hecho la energía potencial y la función de disipación como un sumatorio.

Como hemos visto antes, el tren de aterrizaje se ha modelado como resortes elásticos y asumiendo comportamiento lineal para los pequeños desplazamientos aquí estudiados, la energía potencial y la función de disipación son:

$$E_p = \frac{1}{2} K_x x^2 + \frac{1}{2} K_y y^2 \quad (3-10)$$

$$D = \frac{1}{2} C_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} C_y \dot{y}^2 \quad (3-11)$$

3.2.2 Hipótesis y simplificaciones

La hipótesis principal es la de pequeños desplazamientos. Aunque sabemos que dicho fenómeno implica unos desplazamientos considerables, dicha hipótesis es necesario en orden de simplificar las ecuaciones, ya que sino la complejidad de las mismas sería inmensa. Además, se puede hacer porque se está interesado en el fenómeno cuando se producen pequeños desplazamientos. Esta hipótesis nos permite linealizar cosenos y senos del siguiente modo:

$$\cos \delta_i \cong 1$$

$$\sin \delta_i \cong \delta_i$$

Hay que mencionar que esta linealización, procedente del polinomio de Taylor, solo es válida en torno al punto de linealización. Los valores anteriores para el coseno y para el seno son válidos si el punto de linealización es δ igual a 0, por lo que es necesario realizar dicha comprobación.

Para calcular el punto de linealización nos tenemos que dar cuenta de que la energía cinética tiene tres términos de procedencia distinta. Tiene un término cuadrático, uno lineal y uno dependiente de la posición.

Como para calcular el punto de linealización se anulan todas las derivadas, el único término que nos quedaría es el dependiente de la posición, que junto a la energía potencial (donde los términos son dependientes de la posición), formarían la energía potencial compensada, la cual es:

$$V^* = E_p - T_o = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} K_\delta \delta_i^2 + \frac{1}{2} K_x x^2 + \frac{1}{2} K_y y^2 - m_p \Omega^2 R e \cos \delta_i \quad (3-12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V^*}{\partial x} = K_x x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial V^*}{\partial y} = K_y y = 0 \rightarrow y = 0 \\ \frac{\partial V^*}{\partial \delta_i} = K_\delta \delta_i + m_p \Omega^2 R e \sin \delta_i = 0 \rightarrow \delta_i = 0 \end{cases} \quad (3-13)$$

Se observa claramente que la solución trivial de última ecuación de (3-13) es δ_i igual a 0, por lo que la simplificación anterior es válida. Véase que si diésemos valores a los distintos parámetros que aparecen y se integrará numéricamente se podría obtener otro punto de linealización o no, en función de dichos valores. En nuestro caso dicha solución no es de interés y para simplificar las ecuaciones es claro que la opción tomada es la mejor.

También se van a calcular en este apartado diversos sumatorios usados a lo largo del desarrollo del modelo. Estos sumatorios son:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \cos \psi_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \sin \psi_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^N (\cos \psi_i)^2 &= \frac{N}{2} \\ \sum_{i=1}^N (\sin \psi_i)^2 &= \frac{N}{2} \\ \sum_{i=1}^N \sin \psi_i \cos \psi_i &= 0 \end{aligned}$$

Estos resultados se obtienen trivialmente con la definición del ángulo ψ_i , el cual tiene un argumento común para todas las palas y un término que suma $\frac{\pi}{2}$ de una pala a otra, obteniendo los resultados anteriores, que se han usado en la obtención de las ecuaciones y que era conveniente aclarar su valor para el correcto seguimiento del procedimiento.

También mencionar que se desprecian todos los productos entre variables, debido también a la hipótesis de pequeños desplazamientos, que hacen que estos productos sean de un orden inferior a los de las variables por separado.

Por último, aplicando estas hipótesis, llegamos a la energía cinética que vamos a usar en la aplicación de las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} M_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_y \dot{y}^2 \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_p \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \Omega^2 + e^2 (\dot{\delta}_i + \Omega)^2 \right. \\
& + 2\Omega R (\dot{y} \cos \psi_i - \dot{x} \sin \psi_i) - 2\dot{x}e(\dot{\delta}_i + \Omega)(\sin \psi_i + \delta_i \cos \psi_i) \\
& \left. + 2\dot{y}e(\dot{\delta}_i + \Omega)(\cos \psi_i - \delta_i \sin \psi_i) + 2\Omega Re(\dot{\delta}_i + \Omega) \left(1 - \frac{\delta_i^2}{2} \right) \right)
\end{aligned} \quad (3-14)$$

3.2.3 Aplicación de las ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange, como ya hemos mencionado, se van a utilizar para obtener las ecuaciones del movimiento. Tendremos por tanto 6 ecuaciones del movimiento, dos referidas al fuselaje y su movimiento controlado por las variables x e y y otras cuatro referidas a las palas, una por cada una de ellas, controlado el movimiento de cada una por la variable δ_i .

3.2.3.1 Grado de libertad δ_i

Se va a aplicar la ecuación de Lagrange a dicho grado de libertad.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \delta_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\delta}_i} = 0 \quad (3-15)$$

Necesitamos calcular todas las derivadas que aparecen en la ecuación, las cuales son:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} = \frac{1}{2} m_p [-2\dot{x}e\Omega \cos \psi_i - 2\dot{y}e\Omega \sin \psi_i - 2\Omega^2 Re\delta_i]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \delta_i} = \frac{1}{2} m_p [2e^2(\dot{\delta}_i + \Omega) - 2\dot{x}e(\sin \psi_i + \delta_i \cos \psi_i) + 2\Omega Re + 2\dot{y}e(\cos \psi_i - \delta_i \sin \psi_i)]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} \right) = \frac{1}{2} m_p [2e^2\ddot{\delta}_i - 2\dot{x}e \sin \psi_i - 2\dot{x}e\Omega \cos \psi_i + 2\dot{y}e \cos \psi_i - 2\dot{y}e\Omega]$$

Por lo que introduciendo dichas derivadas en la ecuación de Lagrange anterior y simplificando obtenemos la primera ecuación (que en realidad son cuatro ecuaciones) del modelo.

$$I\ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_i - m_s \sin(\psi_i) \ddot{x} + m_s \cos(\psi_i) \ddot{y} = 0 \quad (3-16)$$

3.2.3.2 Grado de libertad x

Se va a aplicar la ecuación de Lagrange a dicho grado de libertad.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (3-17)$$

Necesitamos calcular todas las derivadas que aparecen en la ecuación, las cuales son:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_p [2\dot{x} - 2\Omega R \sin \psi_i - 2e(\Omega + \dot{\delta}_i)(\sin \psi_i + \delta_i \cos \psi_i)] + M_x \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (Nm_p + M_x) \ddot{x} + \sum_{i=1}^N m_p \left[e \sin \psi_i (\Omega^2 \delta_i - \ddot{\delta}_i) - \cos \psi_i (\Omega^2 R + e 2 \dot{\delta}_i \Omega + e \Omega^2) \right]$$

Por lo que introduciendo dichas derivadas en la ecuación de Lagrange anterior y simplificando obtenemos la segunda ecuación del modelo.

$$(M_x + Nm_p) \ddot{x} + C_x \dot{x} + K_x x - m_s \sum_{i=1}^N (\ddot{\delta}_i - \Omega^2 \delta_i) \sin \psi_i - 2\Omega \dot{\delta}_i \cos \psi_i = 0 \quad (3-18)$$

3.2.3.3 Grado de libertad y

Se va a aplicar la ecuación de Lagrange a dicho grado de libertad.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial y} = 0 \quad (3-19)$$

Necesitamos calcular todas las derivadas que aparecen en la ecuación, las cuales son:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_p [2\dot{y} - 2\Omega R \cos \psi_i + 2e(\Omega + \dot{\delta}_i)(\cos \psi_i - \delta_i \sin \psi_i)] + M_y \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = (Nm_p + M_y) \ddot{y} + \sum_{i=1}^N m_p [e \cos \psi_i (\ddot{\delta}_i + \Omega^2 \delta_i) - \sin \psi_i (\Omega^2 R + e 2 \dot{\delta}_i \Omega + e \Omega^2)]$$

Por lo que introduciendo dichas derivadas en la ecuación de Lagrange anterior y simplificando obtenemos la tercera ecuación del modelo.

$$(M_y + Nm_p) \ddot{y} + C_y \dot{y} + K_y y + m_s \sum_{i=1}^N (\ddot{\delta}_i - \Omega^2 \delta_i) \cos \psi_i - 2\Omega \dot{\delta}_i \sin \psi_i = 0 \quad (3-20)$$

Por lo tanto, agrupando las ecuaciones anteriores, obtenemos el sistema de ecuaciones de seis variables, cuatro de ellas asociadas a las palas y dos asociadas al fuselaje:

$$\begin{aligned} I \ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + (K_\delta + R m_s \Omega^2) \delta_i - m_s \sin(\psi_i) \ddot{x} + m_s \cos(\psi_i) \ddot{y} &= 0 \\ (M_x + Nm_p) \ddot{x} + C_x \dot{x} + K_x x - m_s \sum_{i=1}^N (\ddot{\delta}_i - \Omega^2 \delta_i) \sin \psi_i - 2\Omega \dot{\delta}_i \cos \psi_i &= 0 \\ (M_y + Nm_p) \ddot{y} + C_y \dot{y} + K_y y + m_s \sum_{i=1}^N (\ddot{\delta}_i - \Omega^2 \delta_i) \cos \psi_i - 2\Omega \dot{\delta}_i \sin \psi_i &= 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

3.3 Transformación de Coleman

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior, se propone un método basado en uno de los trabajos pioneros en este sector, el trabajo de Coleman, que da nombre a dicha transformación. Consiste en un cambio de

variables con el fin de transformar el sistema anterior en un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes. Nótese que vía Matlab o algún otro programa de análisis numérico se puede trabajar con el sistema original también, como se hará, pero si se quiere trabajar de un modo analítico es necesario dicho cambio de variable, el cual estudiamos a continuación.

$$\delta_i(t) = \delta_o(t) + \delta_{1c}(t) \cos \psi_i(t) + \delta_{1s}(t) \sin \psi_i(t) + \delta_{cp}(t) \quad (3-22)$$

Dicho cambio de variable lo aplicaremos sobre la primera ecuación del modelo obteniendo una ecuación para cada variable nueva de nuestro modelo. Las variables x e y siguen siendo las mismas y por lo tanto la ecuación obtenida también.

Dichas variables se pueden interpretar físicamente y se corresponden, por decirlo de algún modo, a cuatro modos de movimiento de las palas.

Las variables que nos van a interesar son δ_{1c} y δ_{1s} , ya que son las que desplazan el centro de gravedad del centro de rotación, excitando el fuselaje en la dirección y y en la dirección x , respectivamente. Las otras dos variables no causan dicho desplazamiento, por lo que no hay efectos de inercia relacionados con dichas variables que causen excitación en el fuselaje.

La correlación que tenemos entre estas variables y las variables originales de las palas son:

$$\begin{aligned} \delta_o(t) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \delta_i(t) \\ \delta_{1c}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \delta_i(t) \cos \psi_i(t) \\ \delta_{1s}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \delta_i(t) \sin \psi_i(t) \\ \delta_{cp}(t) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N (-1)^i \delta_i(t) \end{aligned} \quad (3-23)$$

Lo que hay que hacer a continuación es poner la ecuación original del modelo como un sumatorio. La primera ecuación sale de manera inmediata. Para obtener la segunda y tercera ecuación se multiplica por $\cos \psi_i(t)$ y $\sin \psi_i(t)$, respectivamente. Para la última ecuación hay que multiplicar por $(-1)^i$, obteniéndola también rápidamente. A continuación vamos a ver lo que se acaba de comentar y se van a obtener las ecuaciones después del cambio de variable. Por último se verá en el siguiente apartado que simplificaciones se han hecho y el por qué de la eliminación de determinados términos durante la aplicación tanto del cambio de variable, como de la obtención del modelo original, donde se aplican las mismas simplificaciones.

Se ha explicado cómo se va a usar y la evidente utilidad y ventaja que este posee, ya que pasamos de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos a uno con coeficientes constantes, con la enorme ventaja que esto supone. Sin embargo, ahora se va a tratar de explicar el por qué de este cambio (más allá de la ventaja ya explicada que es evidente), es decir, se pretende explicar la procedencia del mismo.

Nótese que a priori se podría pensar que es un cambio de variable de procedencia matemática debido a la simplificación que hace en el ámbito del cálculo matemático. No obstante, queda claro que no es así, cuando uno se da cuenta de que dicho cambio de variable, además de la simplificación matemática que conlleva, es capaz de reducir el número de variables en base a que produzcan o no fuerzas de inercia. Realmente, aunque han sido tenidas en cuenta, las variables δ_o y δ_{cp} podrían haberse ignorado completamente (numerosos estudios realizados muy similares al llevado a cabo aquí no las mencionan en ningún momento). De hecho, si observamos el procedimiento seguido, vemos que, aunque se han deducido sendas ecuaciones para ambas variables, luego no se han usado para nada y, esto es debido, a que como ya se ha mencionado, no afectan al centro de gravedad del sistema, en donde radica el eje de la cuestión. Antes de eso, gracias a unas imágenes,

vamos a poder observar que representa cada variable de la Transformación de Coleman.

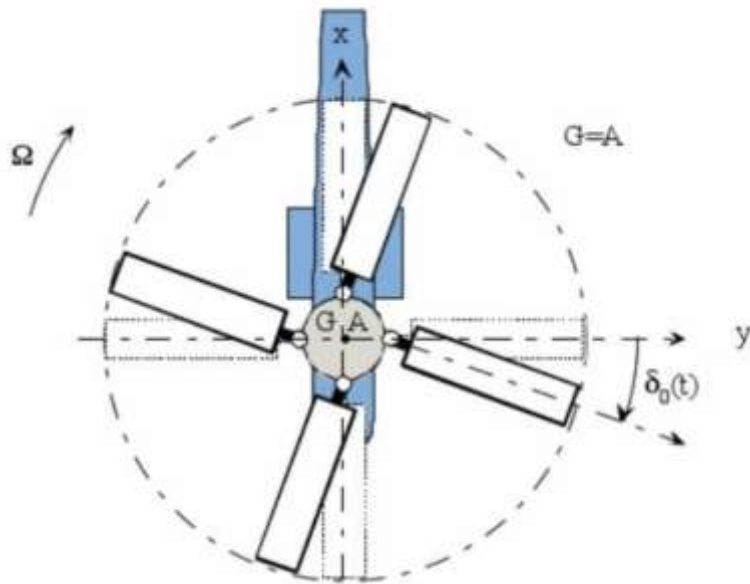


Figura 3-5. Movimiento de retraso colectivo de la pala (Figura Mechanical Instability)

Como ya hemos mencionado, bajo los efectos de inercia debido al movimiento de δ_o , el centro de la cabeza del rotor A y el centro de gravedad de las palas permanecen coincidentes, por lo que no hay excitación al fuselaje debido a este movimiento.

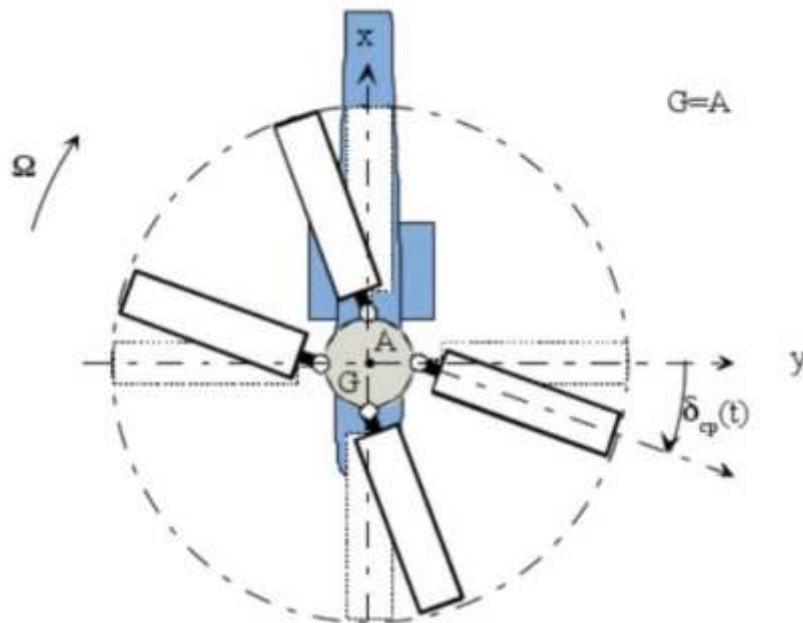


Figura 3-6. Movimiento retrasado de corte de la pala (Figura Mechanical Instability)

Este movimiento tampoco desplaza el centro de gravedad. Los movimientos que nos interesan fundamentalmente son los dos siguientes.

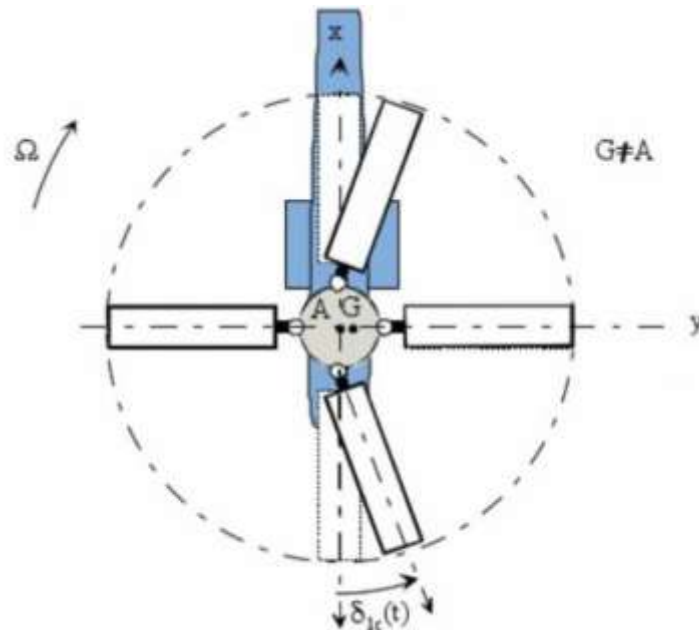


Figura 3-7. Movimiento de retraso cíclico de la pala. Desplazamiento lateral (Figura Mechanical Instability)

Este movimiento desplaza en el centro de gravedad G de las palas del centro de rotación A , lo que excita el fuselaje mediante un desplazamiento lateral.

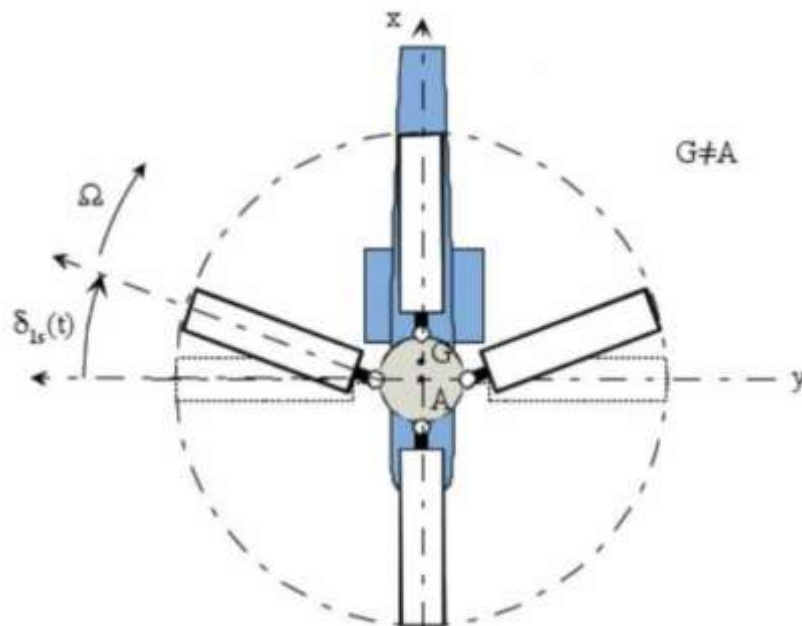


Figura 3-8. Movimiento de retraso cíclico de la pala. Desplazamiento longitudinal (Figura Mechanical Instability)

Este movimiento desplaza el centro de gravedad G de las palas, generando movimiento longitudinal en el fuselaje.

Ahora bien, el objetivo en este punto es determinar el por qué dicha variable desplaza en esa forma el centro de gravedad y el por qué de las ecuaciones (3-19). Si queremos determinar el centro de gravedad no de una pala, sino del sistema rotor-palas completo, basta con usar la ecuación (3-4), sin tener en cuenta los términos de x e y (ya que calcularíamos para este caso el centro de gravedad respecto al sistema de referencia R_1 y dichos términos desaparecerían), como vemos a continuación:

$$\vec{r}_G = \begin{pmatrix} R \cos \psi_i + e \cos(\psi_i + \delta_i) \\ R \sin \psi_i + e \sin(\psi_i + \delta_i) \end{pmatrix}_{"1"}$$

Si separamos ahora en la componente x e y del centro de gravedad y calculamos el centro de gravedad del sistema, multiplicando la masa de cada pala por su centro de gravedad, sumando todas estas contribuciones y dividiendo por la masa total del sistema rotor-palas obtenemos lo siguiente:

$$x_{Gpi} = (R + e) \cos \psi_i - e \delta_i \sin \psi_i$$

$$y_{Gpi} = (R + e) \sin \psi_i + e \delta_i \cos \psi_i$$

El centro de gravedad del sistema completo es:

$$x_G = \frac{(R + e)}{N} \sum_{i=1}^N \cos \psi_i - \frac{e}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \sin \psi_i = -\frac{e}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \sin \psi_i$$

$$y_G = \frac{(R + e)}{N} \sum_{i=1}^N \sin \psi_i + \frac{e}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \cos \psi_i = \frac{e}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \cos \psi_i$$

El signo menos en la coordenada x del centro de gravedad indica que el centro de gravedad se desplaza en sentido contrario al tomado al calcular el centro de gravedad, como se puede corroborar en la Figura 3-7.

Como vemos, los términos del sumatorio son exactamente la correspondencia de las variables δ_{1s} y δ_{1c} . Coleman se dio cuenta de esto y pudo establecer la llamada Transformación de Coleman, mediante este cambio de variable, ya que supo ver el centro de gravedad del sistema y mediante dicha transformación eliminar los términos periódicos.

Al principio de este subapartado mencionamos que no se trataba de un cambio de variable matemático, sino físico, y aquí ha quedado demostrado de donde procede el mismo, siendo el centro de gravedad del sistema fundamental en todo este procedimiento.

Haciendo referencia a la Figura 2-3, la cual está relacionada con este apartado, se podría demostrar si suponemos una variación del ángulo δ_i periódica en forma cosenoidal, que el centro de gravedad (ambas coordenadas del mismo), se dividirían en dos modos de rotación, lo cual demuestra que el centro de gravedad rota alrededor de la cabeza del rotor. Un movimiento cuya frecuencia sería superior a la de la velocidad de giro del rotor Ω , llamado movimiento progresivo, y otro cuya frecuencia sería inferior, llamada movimiento regresivo. Este movimiento del centro de gravedad como ya se ha señalado varias veces es el causante de la aparición de las fuerzas de inercia y consecuentemente de la resonancia en tierra.

Mencionamos la Figura 2-3 anteriormente ya que, las dos coincidencias que hay en dicha imagen, resultado del acoplamiento de movimientos, serían los asociados al movimiento progresivo y movimiento regresivo que acabamos de citar. El movimiento regresivo sería el relacionado con el acoplamiento estable mientras que el movimiento progresivo sería el que produciría el acoplamiento inestable.

3.3.1 Derivadas del cambio de variable

Antes de aplicar el cambio de variable, se hace patente la necesidad de calcular las derivadas de las nuevas variables para poder identificar términos durante la aplicación del mismo.

Las derivadas tanto de δ_o como de δ_{cp} son triviales, ya que solo depende del tiempo la propia variable. Sin embargo, las derivadas de las otras variables son simples pero no triviales, y son muy importantes para poder determinar las ecuaciones resultantes al aplicar el cambio de variable.

- Derivadas de δ_{1c}

$$\dot{\delta}_{1c} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{\delta}_i \cos \psi_i - \Omega \delta_i \sin \psi_i) \quad (3-24)$$

$$\ddot{\delta}_{1c} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\ddot{\delta}_i - \Omega^2 \delta_i) \cos \psi_i - 2\dot{\delta}_i \Omega \sin \psi_i \quad (3-25)$$

- Derivadas de δ_{1s}

$$\dot{\delta}_{1s} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{\delta}_i \sin \psi_i + \Omega \delta_i \cos \psi_i) \quad (3-26)$$

$$\ddot{\delta}_{1c} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\ddot{\delta}_i - \Omega^2 \delta_i) \sin \psi_i + 2\dot{\delta}_i \Omega \cos \psi_i \quad (3-27)$$

3.3.2 Ecuación δ_o

$$\sum_{i=1}^N [I\ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_i - m_s \sin(\psi_i) \ddot{x} + m_s \cos(\psi_i) \ddot{y}] = 0$$

$$I\ddot{\delta}_o + c_\delta \dot{\delta}_o + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_o = 0 \quad (3-28)$$

3.3.3 Ecuación δ_{1c}

El procedimiento que se va a seguir es el siguiente. Primero vamos a calcular las derivadas de δ_{1c} y vamos a ir sumando o restando términos buscando las mismas hasta llegar a una ecuación en la que no aparezca ninguna variable original de las palas.

$$\sum_{i=1}^N [I\ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_i - m_s \sin(\psi_i) \ddot{x} + m_s \cos(\psi_i) \ddot{y}] \cos(\psi_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N [I\ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + m_s \cos(\psi_i) \ddot{y}] \cos(\psi_i) + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_{1c} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N [I\ddot{\delta}_i \cos \psi_i + c_\delta \dot{\delta}_i \cos \psi_i - c_\delta \Omega \delta_i \sin \psi_i + c_\delta \Omega \delta_i \sin \psi_i] + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_{1c} + m_s \ddot{y} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \left[I\ddot{\delta}_i \cos \psi_i + c_\delta \Omega \delta_i \sin \psi_i - I\Omega^2 \delta_i \cos \psi_i + I\Omega^2 \delta_i \cos \psi_i - 2I\Omega \dot{\delta}_i \sin \psi_i + 2I\Omega \dot{\delta}_i \sin \psi_i \right] + c_\delta \dot{\delta}_{1c} + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_{1c} + m_s \ddot{y} = 0$$

$$I\ddot{\delta}_{1c} + c_\delta \dot{\delta}_{1c} + 2\Omega I \dot{\delta}_{1s} + (K_\delta + Rm_s \Omega^2 - I\Omega^2) \delta_{1c} + c_\delta \Omega \delta_{1s} + m_s \ddot{y} = 0 \quad (3-29)$$

3.3.4 Ecuación δ_{1s}

$$\sum_{i=1}^N \left[I\ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_i - m_s \sin(\psi_i) \ddot{x} + m_s \cos(\psi_i) \ddot{y} \right] \sin(\psi_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \left[I\ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + m_s \sin(\psi_i) \ddot{x} \right] \sin(\psi_i) + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_{1s} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \left[I\ddot{\delta}_i \sin \psi_i + c_\delta \dot{\delta}_i \sin \psi_i - c_\delta \Omega \delta_i \cos \psi_i + c_\delta \Omega \delta_i \cos \psi_i \right] + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_{1s} - m_s \ddot{x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \left[I\ddot{\delta}_i \sin \psi_i + I\Omega^2 \delta_i \sin \psi_i - I\Omega^2 \delta_i \sin \psi_i + 2I\Omega \dot{\delta}_i \cos \psi_i - 2I\Omega \dot{\delta}_i \cos \psi_i \right] + c_\delta \dot{\delta}_{1s} + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_{1s} - 2m_s \ddot{x} = 0$$

$$I\ddot{\delta}_{1s} + c_\delta \dot{\delta}_{1s} - 2\Omega I \dot{\delta}_{1c} + (K_\delta + Rm_s \Omega^2 - I\Omega^2) \delta_{1s} - c_\delta \Omega \delta_{1c} - m_s \ddot{x} = 0 \quad (3-30)$$

3.3.5 Ecuación δ_{cp}

$$\sum_{i=1}^N (-1)^i \left[I\ddot{\delta}_i + c_\delta \dot{\delta}_i + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_i - m_s \sin(\psi_i) \ddot{x} + m_s \cos(\psi_i) \ddot{y} \right] = 0$$

$$I\ddot{\delta}_{cp} + c_\delta \dot{\delta}_{cp} + (K_\delta + Rm_s \Omega^2) \delta_{cp} = 0 \quad (3-31)$$

3.4 Sistema de ecuaciones resultante

En el sistema de ecuaciones resultante no se tiene en cuenta, como ya se ha comentado, las ecuaciones de las variables δ_o y δ_{cp} , ya que no tienen ningún efecto en la excitación del fuselaje. Por lo tanto el sistema de ecuaciones tras la aplicación de la Transformación de Coleman queda:

$$\begin{aligned}
I\ddot{\delta}_{1c} + c_\delta \dot{\delta}_{1c} + 2\Omega I \dot{\delta}_{1s} + (K_\delta + Rm_s\Omega^2 - I\Omega^2)\delta_{1c} + c_\delta \Omega \delta_{1s} + m_s \dot{y} &= 0 \\
I\ddot{\delta}_{1s} + c_\delta \dot{\delta}_{1s} - 2\Omega I \dot{\delta}_{1c} + (K_\delta + Rm_s\Omega^2 - I\Omega^2)\delta_{1s} - c_\delta \Omega \delta_{1c} - m_s \ddot{x} &= 0 \\
(M_x + Nm_p)\ddot{x} + C_x \dot{x} + K_x x + \frac{N}{2} m_s \ddot{\delta}_{1s} &= 0 \\
(M_y + Nm_p)\ddot{y} + C_y \dot{y} + K_y y - \frac{N}{2} m_s \ddot{\delta}_{1c} &= 0
\end{aligned} \tag{3-32}$$

A continuación se canoniza el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta}_{1c} + 2\lambda_\delta \omega_\delta \dot{\delta}_{1c} + 2\Omega \dot{\delta}_{1s} + (\omega_\delta^2 - \Omega^2)\delta_{1c} + 2\lambda_\delta \omega_\delta \Omega \delta_{1s} + S_c \dot{y} &= 0 \\
\ddot{\delta}_{1s} + 2\lambda_\delta \omega_\delta \dot{\delta}_{1s} - 2\Omega \dot{\delta}_{1c} + (\omega_\delta^2 - \Omega^2)\delta_{1s} - 2\lambda_\delta \omega_\delta \Omega \delta_{1c} - S_c \ddot{x} &= 0 \\
\ddot{x} + 2\lambda_x \omega_x \dot{x} + \omega_x^2 x + S_{dx} \ddot{\delta}_{1s} &= 0 \\
\ddot{y} + 2\lambda_y \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y - S_{dy} \ddot{\delta}_{1c} &= 0
\end{aligned} \tag{3-33}$$

Las características modales y términos de acoplamiento que aparecen son:

$$\begin{aligned}
\omega_\delta &= \sqrt{\frac{K_\delta + Rm_s\Omega^2}{I}} \\
\lambda_\delta &= \frac{c_\delta}{2\sqrt{I(K_\delta + Rm_s\Omega^2)}} \\
\omega_x &= \sqrt{\frac{K_x}{(M_x + Nm_p)}} \\
\lambda_x &= \frac{C_x}{2\sqrt{K_x(M_x + Nm_p)}} \\
\omega_y &= \sqrt{\frac{K_y}{(M_y + Nm_p)}} \\
\lambda_y &= \frac{C_y}{2\sqrt{K_y(M_y + Nm_p)}} \\
S_c &= \frac{m_s}{I} \\
S_{dx} &= \frac{Nm_s}{2(M_x + Nm_p)} \\
S_{dy} &= \frac{Nm_s}{2(M_y + Nm_p)}
\end{aligned}$$

4 IMPLEMENTACIÓN EN MATLAB

Los resultados que consigas serán directamente proporcionales al esfuerzo que aplicas.

-Denis Waitley-

El análisis numérico que se va a llevar a cabo se va a dividir en dos capítulos. En este primer capítulo se va a explicar cómo se va a implementar en Matlab el modelo de cara a realizar el análisis y en el segundo capítulo referente al análisis numérico se van a comentar los resultados obtenidos.

Como hemos visto en el capítulo anterior, se han obtenido las ecuaciones del modelo y posteriormente se ha aplicado un cambio de variable para convertir las ecuaciones originales que tienen coeficientes dependientes del tiempo en unas ecuaciones con coeficientes constantes, con el fin de realizar un estudio analítico también.

Por lo tanto, las ecuaciones que nos van a interesar en los dos próximos capítulos son las ecuaciones originales, que se pueden tratar con coeficientes dependientes del tiempo sin ningún problema, ya que el estudio es numérico.

4.1 Estimación de parámetros

Uno de los temas más críticos, sino el que más, a la hora de realizar el análisis numérico es la estimación de todos los parámetros que aparecen en las ecuaciones del modelo. Este tema es crítico ya que se tienen que introducir valores lo más realistas posible para que los resultados se correspondan con la realidad lo máximo posible.

Para ello se van a separar tres bloques de parámetros, con algunos parámetros comunes. Dichos parámetros comunes serán todos los geométricos, es decir, aquellos que involucren distancias sobretodo, y también van a ser comunes las masas, tanto del fuselaje como de las palas. Obviamente, el número de palas también será común. Mencionar que dichos valores serán comunes para los dos primeros bloques de parámetros, no siendo así para el último bloque de parámetros, donde estos serán distintos, aunque no de relevancia, por lo que no se verán cuales son, aunque bastaría con aplicar las relaciones existentes para determinarlos.

La estimación de los parámetros comunes es sencilla de hacer, puesto que no hay más que coger un helicóptero de referencia, pudiendo obtener fácilmente los valores de distancias y masas, al menos la mayoría de ellos. Los valores que no se tengan, como la masa unitaria de la pala, serán estimadas. No obstante, dichos valores no son críticos y no influyen de la manera en que lo hace los valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento.

El helicóptero de referencia es el EC-135 (es el mismo de la imagen que aparece en el capítulo de introducción). En la siguiente imagen podremos ver un plano del mismo donde aparecen todas las distancias, aunque a nosotros solo nos interesa principalmente la longitud de las palas.

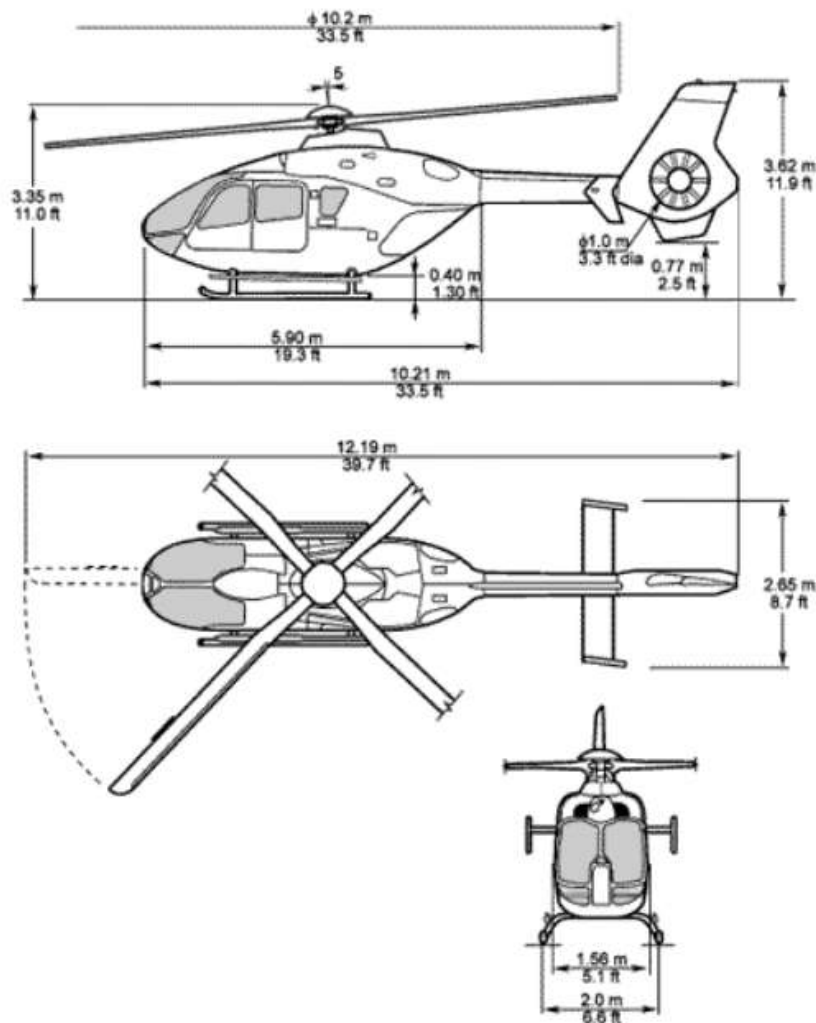


Figura 4-1. Planos helicóptero EC-135

También tenemos muchos otros valores que nos han sido proporcionados tales como masas, potencia, alcance máximo, etc. De todos estos valores a nosotros solo nos interesan las masas. Los datos que tenemos de masas son el peso en vacío y el peso máximo al despegue. Nosotros vamos a estimar la masa de la estructura como un media aritmética de ambas y repartiéndola por igual a lo largo de los ejes x e y, que es como aparece la masa del fuselaje en nuestro modelo. Hay que mencionar que dichos pesos incluyen el peso de las palas, que en nuestro modelo se debe dar un valor a este peso concreto. No se va a tener en cuenta que se incluye el peso de las palas a la hora de estimar el peso del fuselaje. En la siguiente tabla adjuntamos todos esos valores.

W_o (kg)	W_{max} (kg)	M_{avg} (kg)	M_x (kg)	M_y (kg)	m_p (kg)
1490	2835	2162.5	2162.5	2162.5	50

Tabla 4-1. Masas del sistema

Por último, el resto de parámetros serían el radio de la cabeza del rotor así como la distancia de la misma al centro de gravedad de la pala, que se supone en la mitad de la misma. Todo esto va a quedar reunido en la siguiente tabla, así como el momento estático ($m_s = m_p e$) y la inercia de cada pala ($I = m_p e^2$), que como

vemos dependen de la distancia e .

R (m)	e (m)	m_s (kg*m)	I (kg*m ²)
0.3	2.55	127.5	325.125

Tabla 4-2. Distancias del sistema y momento estático e inercia de cada pala

Con estas dos tablas quedan agrupados todos los parámetros que van a ser comunes a los dos primeros bloques de parámetros, y que por tanto, permanecerán invariables durante todo el análisis numérico relacionado con el estudio del comportamiento ante un episodio de resonancia en tierra.

Respecto al tercer bloque de parámetros, solo la distancia R y la masa de una pala m_p serán los mismos que para los otros dos bloques de parámetros.

4.1.1 Bloque de parámetros 1

Los parámetros asociados tanto a rigidez como a amortiguamiento se van a dividir en tres bloques. El objetivo de esto es que, con un bloque de parámetros lo más realista posible, reproducir el fenómeno de la resonancia en tierra en Matlab. Esto se hará en este bloque de parámetros. En el segundo bloque, se pretende dar valores más elevados de las constantes de amortiguamiento con el fin de observar como no se llegarían a producir las violentas oscilaciones características del fenómeno si se tuvieran valores más grandes de los mismos. El tercer bloque se usará para calcular la estabilidad del sistema, como se verá más adelante.

Mencionar que con el cálculo de la curva de estabilidad, los bloques de parámetros 1 y 2 son tales que coinciden con las zonas inestable y estable del sistema. También se podrá comprobar que con dichos valores dan lugar a polos con parte real positiva y con parte real negativa, respectivamente.

Como se acaba de mencionar, el objetivo de este bloque de parámetros y de este análisis es ver el aumento de las vibraciones de manera considerable a lo largo del tiempo. Las estimaciones que aquí se hacen carecen de una precisión muy elevada, debido a la dificultad de estimar los mismos sin realizar test experimentales, entre otras cosas. Debido a esta problemática, el estudio que se va a realizar se pretende enfocar desde un punto de vista cualitativo, es decir, los valores que aparecerán en las figuras no serán del todo realistas, pero el comportamiento, que es lo que nos interesa, si lo será.

Con lo de que los valores no serán del todo realistas nos referimos a que estos deberían ser inferiores a los que aparecen. Esto es obvio que un helicóptero no puede aguantar los desplazamientos que aparecerán en las gráficas, habiendo quedado destruido previamente y desapareciendo por tanto la vibración. Sin embargo, en un modelo teórico como el que se usa este hecho no lo tiene en cuenta y la vibración aumenta indefinidamente con el tiempo.

A continuación vamos a ver brevemente como se han estimado los parámetros. Se quiere dejar claro en todo momento que las estimaciones de parte de los parámetros no son demasiado precisas y, por lo tanto, se deben mirar con cierta cautela y prestar sobretodo atención al comportamiento que aparecerá y será estudiado en el siguiente capítulo y no a los valores de estos parámetros.

La estimación de los parámetros es la siguiente:

- La velocidad de giro del rotor se toma como 400 rpm, el cual es un valor típico de la misma. Como se debe trabajar en el sistema internacional, el dato que se toma es el que vemos a continuación:

$$\Omega = 41.8879 \text{ rad/s}$$

- Tomamos un valor de la relación de frecuencias ω_δ/Ω y del coeficiente de amortiguamiento λ_δ tal que, según la curva de estabilidad que se hallará en el siguiente capítulo, sea un punto que esté en la zona inestable. Estos valores son:

$$\frac{\omega_\delta}{\Omega} = 0.3 ; \lambda_\delta = 0.002$$

Nótese que con esta relación de frecuencias y los valores de medidas y masa anteriores obtenemos el valor de la constante de rigidez angular del adaptador, la cual es:

$$K_{\delta} = -15771.63 \text{ N} * m$$

Una vez obtenido este valor, junto con el valor de λ_{δ} , y también, al igual que antes, con los valores de masa y medidas anteriores, obtenemos la constante de amortiguamiento del adaptador:

$$c_{\delta} = 16.343 \frac{Ns}{m}$$

- Para hallar la constante de rigidez del fuselaje, se calcula suponiendo que no existiera amortiguamiento y que la frecuencia natural en dicho supuesto es ligeramente superior a la velocidad de rotación, obteniendo:

$$K_x = K_y = M\omega_n^2 = M(1.065\Omega)^2 = 4300000 \text{ N/m}$$

Con esta estimación obtenemos la frecuencia natural del fuselaje, que obviamente es muy parecida a la supuesta anteriormente:

$$\omega_x = \omega_y = 42.663 \text{ rad/s}$$

- Suponiendo un coeficiente de amortiguamiento típico (este valor coincide con el tomado en el bloque de parámetros 3), podemos obtener la constante de amortiguamiento del fuselaje, siendo esta:

$$\lambda_x = \lambda_y = 0.02 \rightarrow C_x = C_y = 4031 \frac{Ns}{m}$$

- Por último, se calculan las características modales que representan el acoplamiento entre el fuselaje y las palas, obteniendo los siguientes valores:

$$S_c = 0.3922 \text{ m}^{-1}; S_{dx} = S_{dy} = 0.1079 \text{ m}$$

Todos estos valores que se han hallado se adjuntan en las siguientes dos tablas. En la próxima tabla podemos ver todos los parámetros físicos del sistema.

c_{δ} (N*s/m)	K_{δ} (N*m)	C_x (N*s/m)	K_x (N/m)	C_y (N*s/m)	K_y (N/m)
16.343	-15771.63	4031	4300000	4031	4300000

Tabla 4-3. Constantes de rigidez y amortiguamiento BP1

Por otra parte, en la siguiente tabla vemos el conjunto de todas las características modales.

ω_{δ} (rad/s)	ω_x (rad/s)	ω_y (rad/s)	λ_{δ}	λ_x	λ_y	S_{dx}	S_{dy}	S_c
12.57	42.663	42.663	0.002	0.02	0.02	0.1079	0.1079	0.3922

Tabla 4-4. Características modales BP1

Por último, se ha hecho la simplificación de que las características tanto de masa, como de amortiguamiento, como de rigidez son las mismas a lo largo del eje x que a lo largo del eje y.

4.1.2 Bloque de parámetros 2

En este bloque los parámetros van a ser tales que se mitigan las vibraciones de la estructura. La estimación de los mismos se va a hacer del mismo modo que se ha hecho en el bloque 1, siendo varios parámetros los mismos.

- La velocidad de rotación del rotor será la misma, es decir, tendremos una velocidad de giro igual a 400 rpm.
- En este caso buscaremos una pareja de valores tal que nos situemos en la zona estable del sistema, la cual es:

$$\frac{\omega_{\delta}}{\Omega} = 0.4 ; \lambda_{\delta} = 0.005$$

- Los valores referentes al amortiguamiento y rigidez del fuselaje no varían, por lo que la frecuencia natural tampoco lo hace.
- Obviamente, las características modales dependientes exclusivamente de términos de masa y distancias tampoco cambian (acoplamiento).
- Al variar la relación de frecuencias y consecuentemente la frecuencia natural de las palas, varían la constante de rigidez angular, la cual pasa a tener el siguiente valor:

$$K_{\delta} = 24161 \text{ N} * \text{m}$$

Este cambio de valor, junto al cambio del coeficiente de amortiguamiento, hace que la constante de amortiguamiento del adaptador cambie y pasa a ser igual a:

$$c_{\delta} = 54.475 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

Los valores de este caso se adjuntan en la siguiente tabla.

c_{δ} (N*s/m)	K_{δ} (N*m)	C_x (N*s/m)	K_x (N/m)	C_y (N*s/m)	K_y (N/m)
54.475	24160.79	4031	4300000	4031	4300000

Tabla 4-5. Constantes de rigidez y amortiguamiento BP2

Las características modales se pueden ver también en la siguiente tabla.

ω_{δ} (rad/s)	ω_x (rad/s)	ω_y (rad/s)	λ_{δ}	λ_x	λ_y	S_{dx}	S_{dy}	S_c
12.57	42.663	42.663	0.005	0.02	0.02	0.1079	0.1079	0.3922

Tabla 4-6. Características modales BP2

4.1.3 Bloque de parámetros 3

Este bloque de parámetros se ha cogido de valores aportados por la literatura, concretamente los que fueron usados en el análisis llevado a cabo en [3]. Este bloque de parámetros será el que se use a la hora de realizar el análisis de estabilidad numérico.

ω_y (rad/s)	ω_{δ} (rad/s)	S_{dy}	S_c	λ_y
1	2	0.05	0.1	0.02

Tabla 4-7. Características modales BP3

En los anteriores bloques de parámetros hemos trabajado con los parámetros físicos, calculando las características modales a través de las relaciones incluidas en el capítulo 3. En este caso se hace a la inversa, ya que los valores aportados en la literatura vienen a partir de las características modales, calculando estos en caso de que fuera necesario.

Sin embargo, como este bloque de parámetros se utiliza para calcular la estabilidad del sistema usando el polinomio característico, el cual está en función de las características modales, no es necesario el cálculo de los parámetros físicos.

En la tabla 4-7 no está el valor de λ_8 , ya que dicho parámetro se va variando en el cálculo de la curva de estabilidad, como se verá en el siguiente capítulo.

También se puede observar como no tenemos en este caso las características de masa, rigidez y amortiguamiento a lo largo del eje x. Esto es debido a que para el análisis de estabilidad se desprecia el desplazamiento en dicha dirección, como se verá en el capítulo 6.

4.2 Comando ode45

Una vez obtenido el modelo en el capítulo anterior y definidos los distintos parámetros en el apartado anterior, se procede a su análisis numérico, para lo cual hay que implementar todo lo anterior en Matlab.

Los parámetros estimados anteriormente no tienen una precisión demasiado elevada. Sin embargo, en este apartado se pretende modelar los dos tipos de respuesta que podría tener un helicóptero en caso de resonancia en tierra, más allá de que los números que aparecerán en las gráficas fueran algo menores o mayores, pero el tipo de respuesta sería muy similar al que veremos en el siguiente capítulo, donde se obtendrán los resultados de la implementación del modelo.

En este capítulo, como ya se ha dicho, vamos a explicar su implementación en Matlab, y los códigos que se hayan usado en el análisis numérico se incluirán al final del trabajo en un anexo.

Primero recordar que el sistema que se va a implementar en Matlab es el sistema original (ecuación 3-18). Implementar en Matlab un sistema de ecuaciones diferenciales como el que tenemos es bastante sencillo y se hace gracias al comando ode45.

Dicho comando solo trabaja con ecuaciones diferenciales de primer grado, por lo que se realiza un cambio de variables trivial que convierte nuestro sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado en uno de primer grado, duplicando las variables que se tengan, por lo que en Matlab es como si tuviéramos un sistema de ecuaciones de doce incógnitas.

El conjunto de programas para el análisis se divide en cuatro, tres son scripts y uno es una función. El primero de los scripts es simplemente todos los parámetros estimados anteriormente y el cálculo con estos parámetros de las características modales definidas en el capítulo anterior. Se hace así en vez de en un solo script (que se podría igual) por tenerlo más organizado. En el segundo script es donde se aplica el comando ode45 y con el tercero se calcula la curva de estabilidad.

Lo primero que se hace en el segundo script es establecer la condición inicial y, con el comando opciones, se establece la tolerancia deseada. Una vez que se ha hecho esto, al comando ode45 hay que darle ambos datos y la función que tiene el sistema de ecuaciones a resolver, como vemos en la siguiente imagen.

```
v0=zeros(12,1);
v0(1,1)=pi/5;v0(2,1)=pi/5+pi/2;v0(3,1)=pi/5+pi;v0(4,1)=pi/5+3*pi/2;
TOL=0.4e-7;
opciones=odeset('AbsTol',TOL,'RelTol',TOL);
[T,Y]=ode45(@sist_orig,[0 10],v0,opciones);
```

Figura 4-2. Uso del comando ode45

La condición inicial se ha elegido arbitrariamente, suponiendo por ejemplo un ángulo de $\frac{\pi}{5}$ en la pala número uno al contacto con el suelo.

Por último, nos queda la función que se le debe dar al comando ode45. Las variables se dan en un vector r , que es un vector columna 12x1. Dicho vector es el siguiente:

$$r = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \\ r(4) \\ r(5) \\ r(6) \\ r(7) \\ r(8) \\ r(9) \\ r(10) \\ r(11) \\ r(12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ x \\ y \\ \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \dot{\delta}_3 \\ \dot{\delta}_4 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

En el comando ode45, se debe despejar la incógnita de segundo grado y si, como es el caso, dichas variables están multiplicadas por algún término, se debe sacar una matriz M que multiplique al resto de la expresión. El sistema expresado en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$AF = B \quad (4-1)$$

donde las matrices son las siguientes:

$$F = \begin{pmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \dot{\delta}_3 \\ \dot{\delta}_4 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} r(7) \\ r(8) \\ r(9) \\ r(10) \\ r(11) \\ r(12) \\ -c_\delta r(7) - (K_\delta + Rm_s \Omega^2) r(1) \\ -c_\delta r(8) - (K_\delta + Rm_s \Omega^2) r(2) \\ -c_\delta r(9) - (K_\delta + Rm_s \Omega^2) r(3) \\ -c_\delta r(10) - (K_\delta + Rm_s \Omega^2) r(4) \\ -C_x r(11) - K_x r(5) - m_s \sum_{i=1}^N \Omega^2 r_i \sin \psi_i + 2\Omega \dot{r}_i \cos \psi_i \\ -C_y r(12) - K_y r(6) - m_s \sum_{i=1}^N \Omega^2 r_i \cos \psi_i + 2\Omega \dot{r}_i \sin \psi_i \end{pmatrix}$$

La matriz A la construimos del siguiente modo. Debido a que es una matriz 12x12, es decir, una matriz muy grande, se va a construir por bloques.

$$\begin{aligned} v_1 &= (I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -m_s \sin(\Omega t) \quad m_s \cos(\Omega t)) \\ v_2 &= (0 \quad I \quad 0 \quad 0 \quad -m_s \sin(\Omega t + \pi/2) \quad m_s \cos(\Omega t + \pi/2)) \\ v_3 &= (0 \quad 0 \quad I \quad 0 \quad -m_s \sin(\Omega t + \pi) \quad m_s \cos(\Omega t + \pi)) \\ v_4 &= (0 \quad I \quad 0 \quad 0 \quad -m_s \sin(\Omega t + 3\pi/2) \quad m_s \cos(\Omega t + 3\pi/2)) \\ v_5 &= (-m_s \sin(\Omega t) \quad -m_s \sin(\Omega t + \pi/2) \quad -m_s \sin(\Omega t + \pi) \quad -m_s \sin(\Omega t + 3\pi/2) \quad M_x \quad 0) \\ v_6 &= (m_s \cos(\Omega t) \quad m_s \cos(\Omega t + \pi/2) \quad m_s \cos(\Omega t + \pi) \quad m_s \cos(\Omega t + 3\pi/2) \quad 0 \quad M_y) \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Evidentemente, para que las dimensiones cuadren, la matriz identidad y las dos matrices de ceros que aparecen tienen dimensión 6x6.

Como vemos, la matriz A multiplica a las variables de segundo orden y la variable δ_i se ha separado ya en cuatro (número de palas) para su implementación en Matlab y para obtener la variable asociada a cada pala.

5 RESULTADOS

Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado. Un esfuerzo total es una victoria completa.

-Mahatma Ghandi-

En este capítulo se van a exponer y comentar los resultados obtenidos de la implementación del modelo con las variables originales.

5.1 Cálculo de la estabilidad del sistema

A pesar de que el cálculo de una curva que determine las zonas estable e inestable del sistema se incluye en este apartado ya que se realiza numéricamente, hay que tener presente que este análisis está dividido entre este capítulo y el siguiente, ya que en el próximo capítulo se analiza la estabilidad desde un punto de vista analítico, estudiando un criterio de estabilidad propuesto en la literatura y comparándolo con el que se va a obtener en este apartado. También mencionar que el polinomio que se va a usar en este apartado se encuentra deducido completamente y con el valor de los coeficientes correspondiente en el siguiente capítulo. Dicho polinomio es:

$$Ap^6 + Bp^5 + Cp^4 + Dp^3 + Ep^2 + Fp + G = 0 \quad (5-1)$$

Como se ha dicho, el valor de los coeficientes está en el siguiente capítulo, así como la deducción del mismo.

La teoría de control dice que los polos que tiene un polinomio deben ser reales o ser polos complejos conjugados. La parte real de los polos es la que determina la estabilidad del sistema. Si todos los polos están situados en el semiplano izquierdo, es decir, tienen parte real negativa, el sistema es estable. Si por el contrario, algún polo tiene la parte real positiva, el sistema es inestable.

Basándonos en este hecho, el procedimiento seguido es el siguiente. Se ha usado el bloque de parámetros 3, tal y como se ha indicado en el capítulo anterior. Como lo que hace que un sistema sea estable o no es sus polos tengan parte real negativa o positiva, se fija una relación entre ω_δ/Ω y se calcula el valor de λ_δ crítico que hace que un polo pase de tener parte real negativa a parte real positiva. Esto se hace variando progresivamente el valor de λ_δ hasta hallar el valor buscado. Mencionar que se toman estos dos parámetros para calcular la curva de estabilidad debido a que son los parámetros usados en [11] para determinar el criterio de estabilidad, con el que se pretende compararlo en el siguiente capítulo.

Una vez determinados estos valores, se hace una interpolación en Matlab mediante el comando *spline*, el cual nos proporciona la curva de estabilidad. Los valores hallados y que se han usado en la interpolación se adjuntan en la siguiente tabla:

ω_δ/Ω	$\lambda_{\delta\text{crítico}}$
0.1	0.015
0.2	0.007
0.3	0.0033
0.4	0.0016
0.5	0.0007
0.6	0.0003

Tabla 5-1. Valores usados en la interpolación en Matlab

Interpolando, la curva que se obtiene es la siguiente:

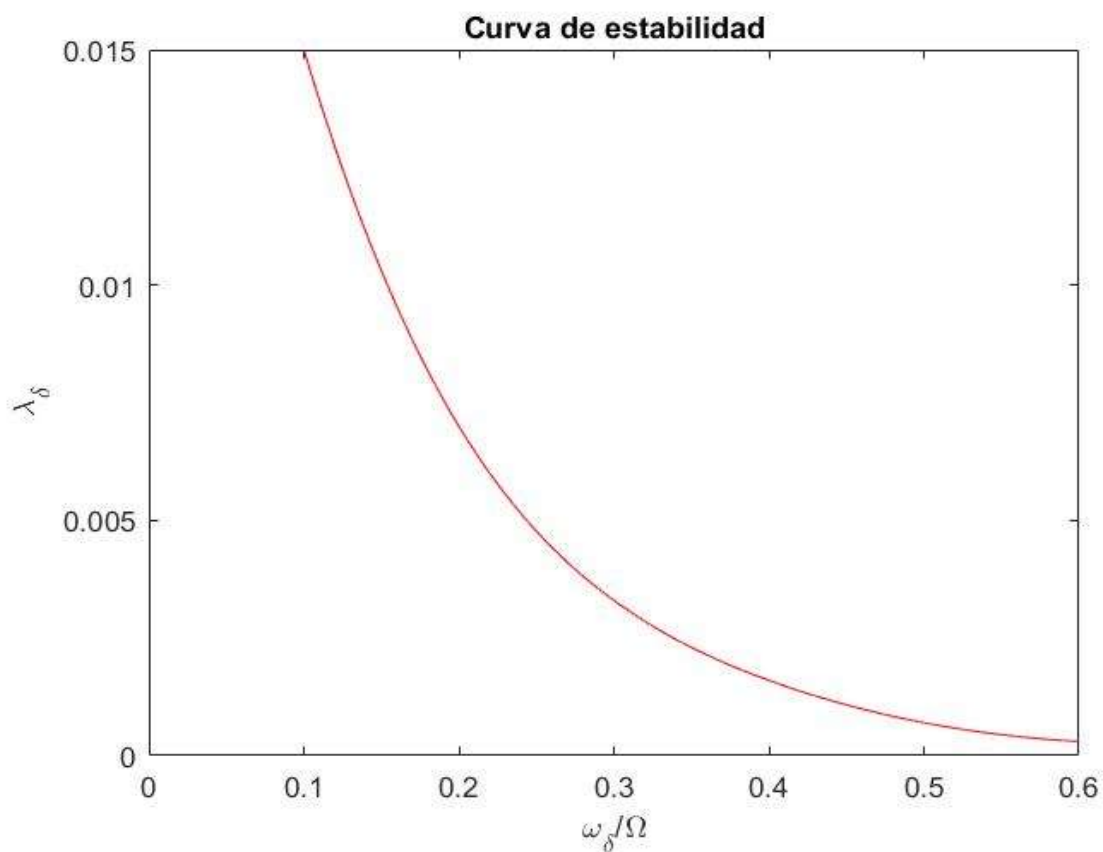


Figura 5-1. Curva de estabilidad

Si los parámetros son tal que estamos por encima de esta curva, el sistema será estable. Si por el contrario estamos por debajo de la misma, el sistema es inestable. Se comentará un poco más en detalle cuando se compare con el criterio de estabilidad seleccionado de la literatura.

Por último en este apartado, vamos a ver algún ejemplo con alguno de los valores anteriores de la distribución de los polos.

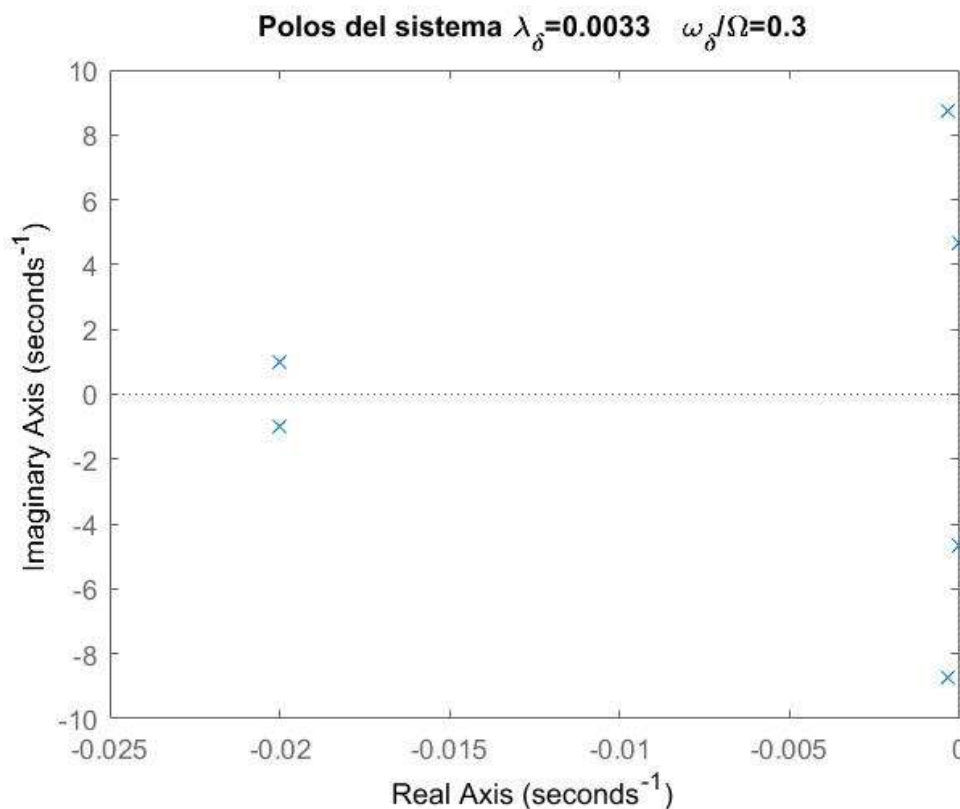


Figura 5-2. Ejemplo de los polos del sistema

Vemos que para estos valores hay dos polos (complejos conjugados) cuya parte real es 0 y si se disminuyera λ_δ pasarían a tener parte real positiva, por lo que como predice la teoría de control, el sistema pasaría de ser estable a inestable.

Por último, mencionar que los valores usados en el eje x en la curva de estabilidad son tales para intentar simular el mismo rango que en la literatura y que la comparación que se lleve a cabo sea en un mismo rango y ver si son similares o no.

5.2 Resultados BP1

Como se ha comentado en el capítulo anterior, con este bloque de parámetros se consigue reproducir el fenómeno de la resonancia en tierra. El objetivo de este apartado y del siguiente es estudiar y observar el comportamiento dependiendo de los parámetros físicos del sistema y, concretamente, del amortiguamiento del mismo.

En este bloque cogemos como se ha explicado una pareja de valores que estén por debajo de la curva de estabilidad, es decir, en la zona inestable. Hay que darse cuenta que aunque la curva de estabilidad es válida obviamente, no lo es la asíntota vertical, ya que en este caso tenemos una constante de rigidez angular negativa.

A continuación vemos el punto seleccionado en la curva de estabilidad.

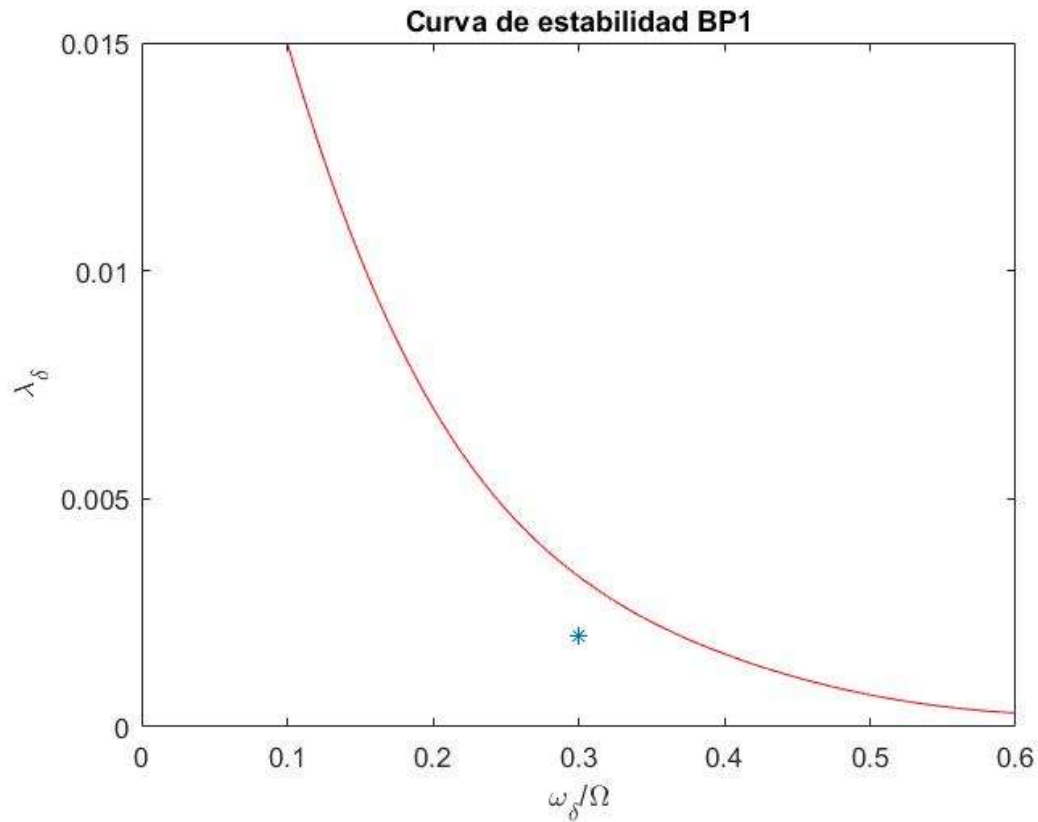


Figura 5-3. Punto en la zona inestable del sistema

Los polos del sistema los podemos ver en la siguiente imagen. Evidentemente, nos encontramos con polos cuya parte real es positiva.

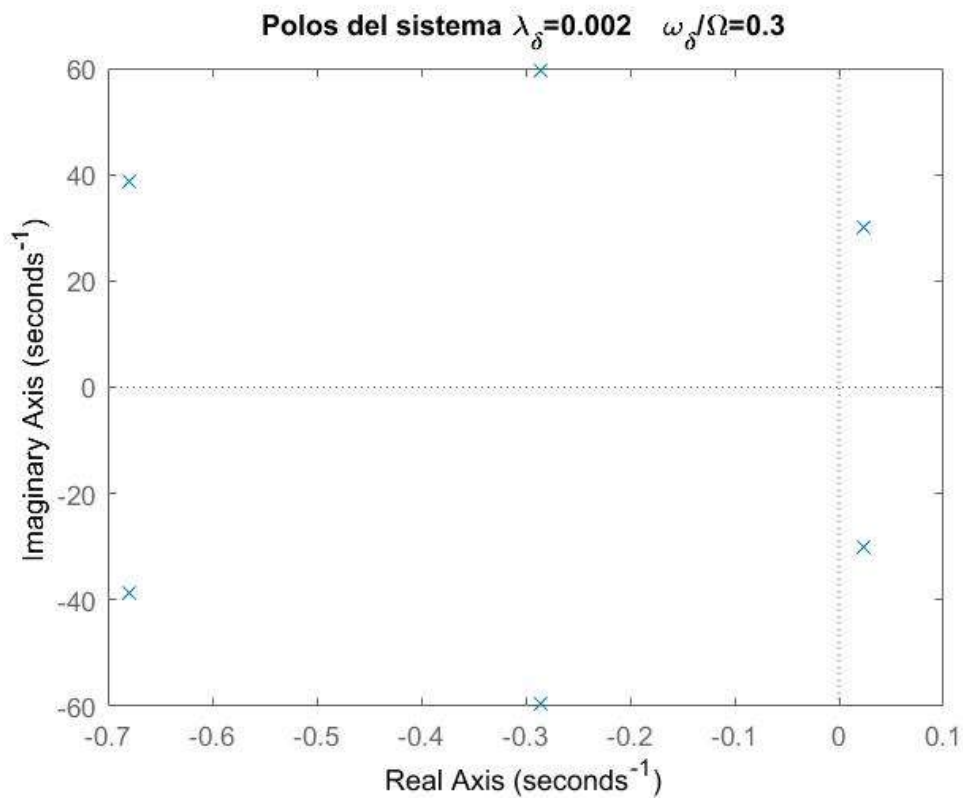


Figura 5-4. Polos del polinomio característico cuando el sistema es inestable (BP1)

Como vemos, al encontrarnos en la zona inestable, el comportamiento esperado es un aumento de la vibración con el tiempo que causaría la destrucción del helicóptero como se ha visto en el marco teórico. Los parámetros que nos interesan del sistema son principalmente el desplazamiento del fuselaje, ya que el de las palas no es el causante principal de la rotura del sistema. De hecho, en numerosos trabajos como [3] solo se representa el desplazamiento del fuselaje, e incluso, solo se trabaja como el desplazamiento lateral del mismo, ignorando el longitudinal.

El movimiento de las palas sería en torno a su posición de equilibrio. Valores por encima de los 2π rad se interpretan como que se ha dado una vuelta. El desplazamiento de las palas lo que indicaría es que durante una vibración dejarían de estar equidistantes y estarían unas más cerca o alejadas de las otras.

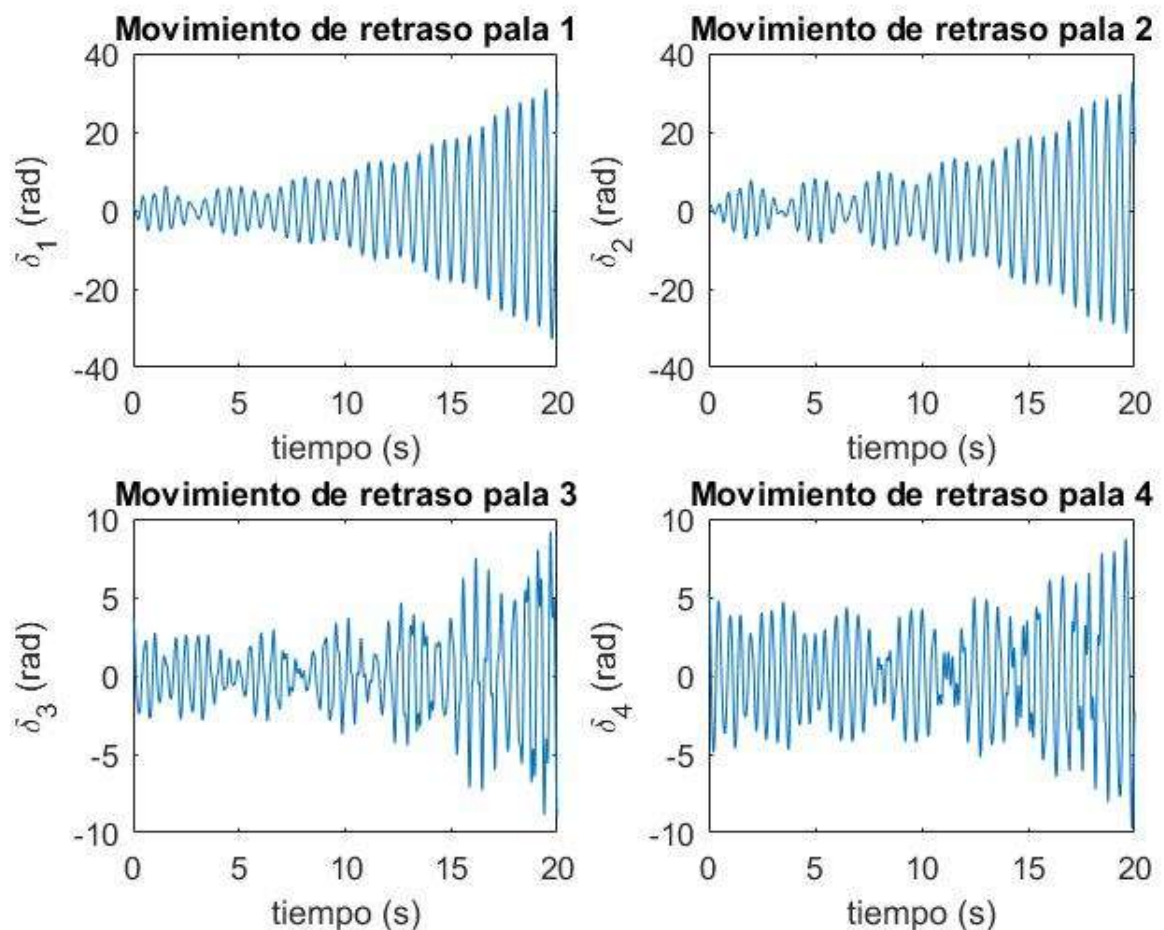


Figura 5-5. Desplazamiento de las N palas del sistema BP1

El desplazamiento del fuselaje lo vemos en las siguientes dos imágenes.

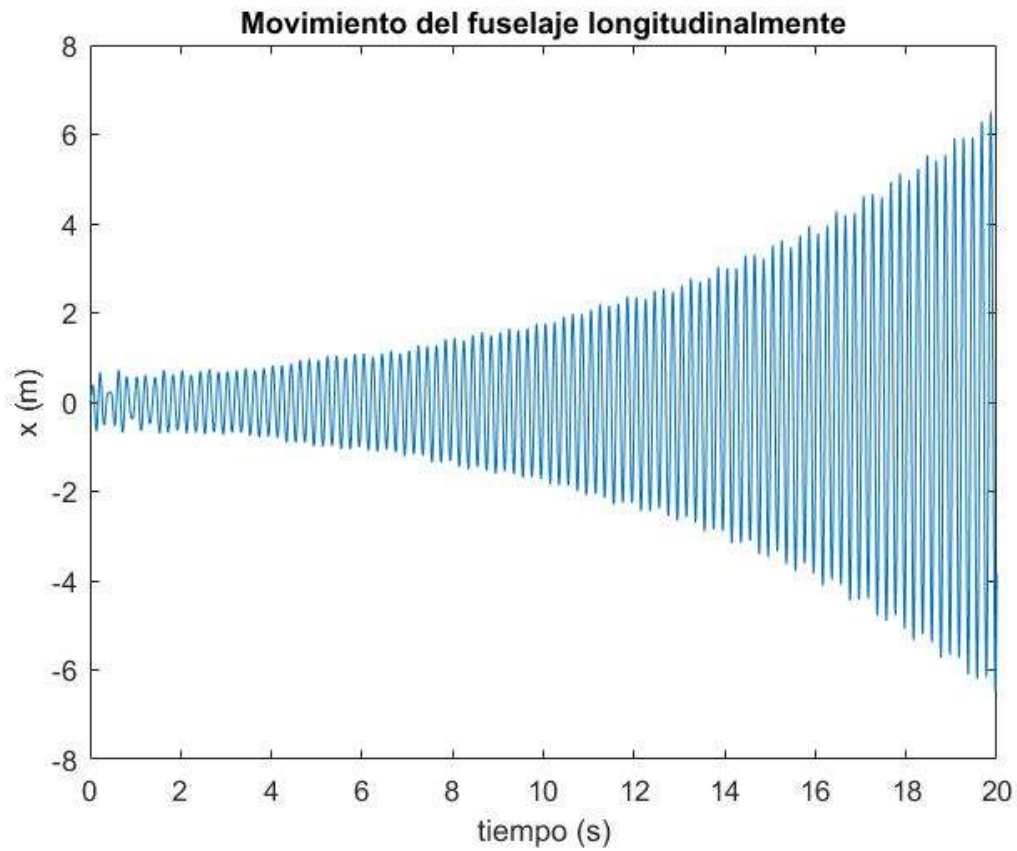


Figura 5-6. Desplazamiento longitudinal del fuselaje BP1

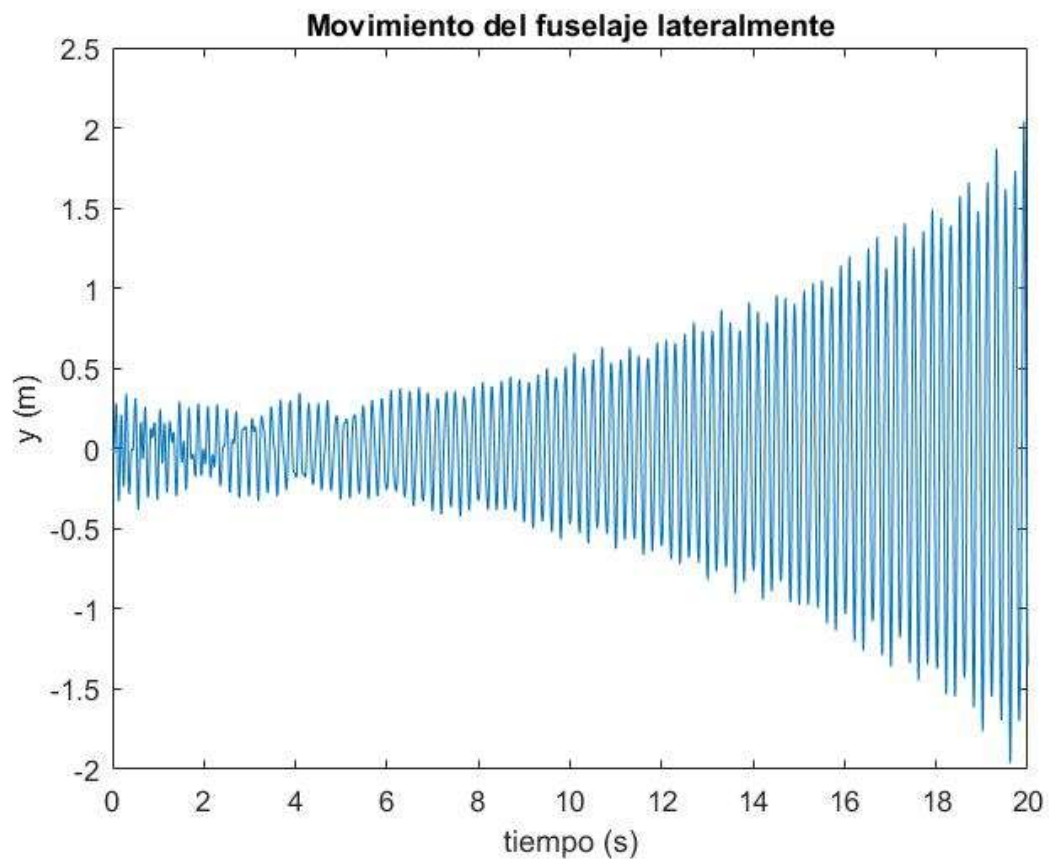


Figura 5-7. Desplazamiento lateral del fuselaje BP1

Como vemos el comportamiento en ambas direcciones es muy similar, alcanzándose en este caso valores superiores a lo largo del eje x , aunque esto no es una norma general, pudiendo depender del resto de parámetros del sistema.

Por otra parte, podemos observar unos desplazamientos superiores a los que serían admisibles. Los desplazamientos admisibles podrían estar en torno a 1 metro. Sin embargo, esto solo indica que el helicóptero se rompería antes de los 20s (tiempo de la simulación). Se ha optado por simular más tiempo en vez de simular solo unos 8-10s (cálculo aproximado viendo las gráficas donde habría valores admisibles) para poder observar el comportamiento en un rango de tiempo superior y que viera más fácilmente la tendencia que tiene este fenómeno.

Como hemos dicho, la precisión de los datos escogidos podría ser superior, por lo que los valores que aparecen en las gráficas podrían ser algo inferiores, aunque dicho hecho no es de relevancia en el estudio del comportamiento. Aún así, el orden de los valores que aparecen es correcto, por lo que los parámetros escogidos no están demasiado alejados de la realidad.

El principal resultado que podemos extraer de las gráficas es el aumento con el tiempo. Este aumento es progresivo, es decir, conforme más tiempo pase, la vibración aumenta más rápido, tal y como se ha observado en alguno de los episodios de resonancia en tierra vistos en el capítulo 2.

También, como se ha visto en el marco teórico, hay una relación de acoplamiento del movimiento del fuselaje con el de las palas (se verá también en el próximo capítulo), la cual no es del todo cierta. Dicha relación es aproximada, es decir, para que se un episodio de este fenómeno no es necesario que dicha igualdad sea exacta. Dicha relación expresa que cuanto más cerca se esté de que sea cierta, la vibración crecerá de forma más brusca y rápida. Esto es fácil de comprobarlo vía Matlab sin más que estableciendo la relación de frecuencias y la velocidad de giro, calcular la frecuencia natural del fuselaje y en base a ella el resto de parámetros. Si se hace se puede observar unos valores extremadamente elevados para tiempos de simulación muy pequeños, corroborando en cierto modo lo que se acaba de decir.

5.3 Resultados BP2

En este bloque se pretende mitigar las vibraciones producidas por este fenómeno. Debe quedar claro que dentro de toda la zona estable el comportamiento no sería exactamente el mismo, pudiendo decrecer la amplitud de la vibración más lentamente en el tiempo por ejemplo. Además, la curva de estabilidad también presenta cierto error, por lo que un valor demasiado cerca de la curva tendría más tendencia a poder producir errores en la reproducción del comportamiento del fenómeno, por lo que se opta por coger un punto suficientemente alejado de la misma para intentar evitar en la medida de la posible que esto ocurra.

En este caso el punto seleccionado se puede observar en la siguiente imagen.

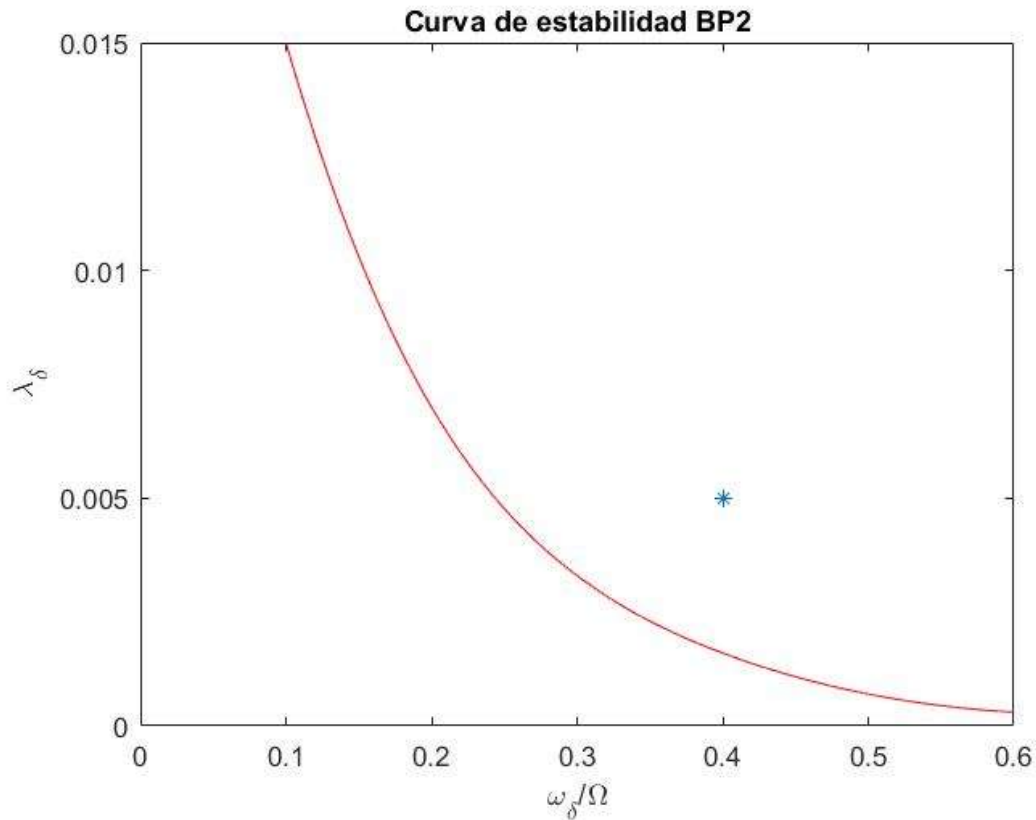


Figura 5-8. Punto en la zona estable del sistema

En este caso, como se puede comprobar con la siguiente imagen, el polinomio característico tiene todos sus polos con parte real negativa.

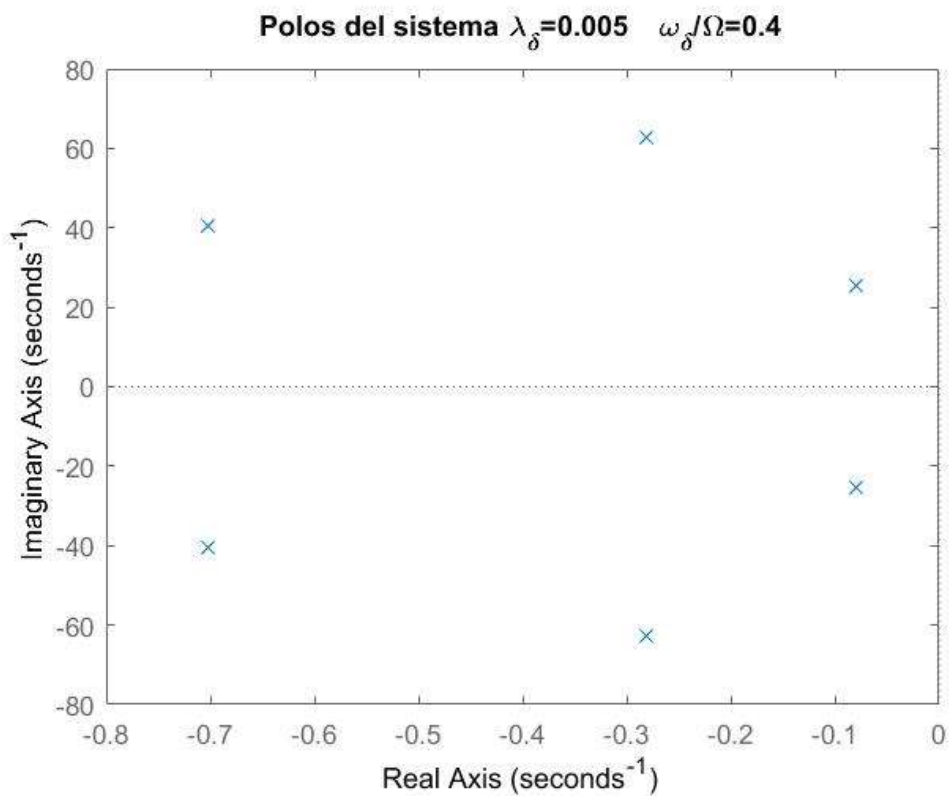


Figura 5-9. Polos del polinomio característico cuando el sistema es estable (BP2)

En este caso, el comportamiento esperado es que la vibración sea amortiguada. También es de esperar que cuando exista vibración los valores sean menores respecto a los vistos en los resultados del bloque de parámetros 1 y que, aunque en algún momento exista vibración, no conlleve ésta en ningún momento la destrucción del helicóptero. Adoptando la misma estructura al anterior subapartado, primero vemos brevemente los desplazamientos de las palas y posteriormente nos centramos en los desplazamientos del fuselaje, tanto lateral como longitudinal.

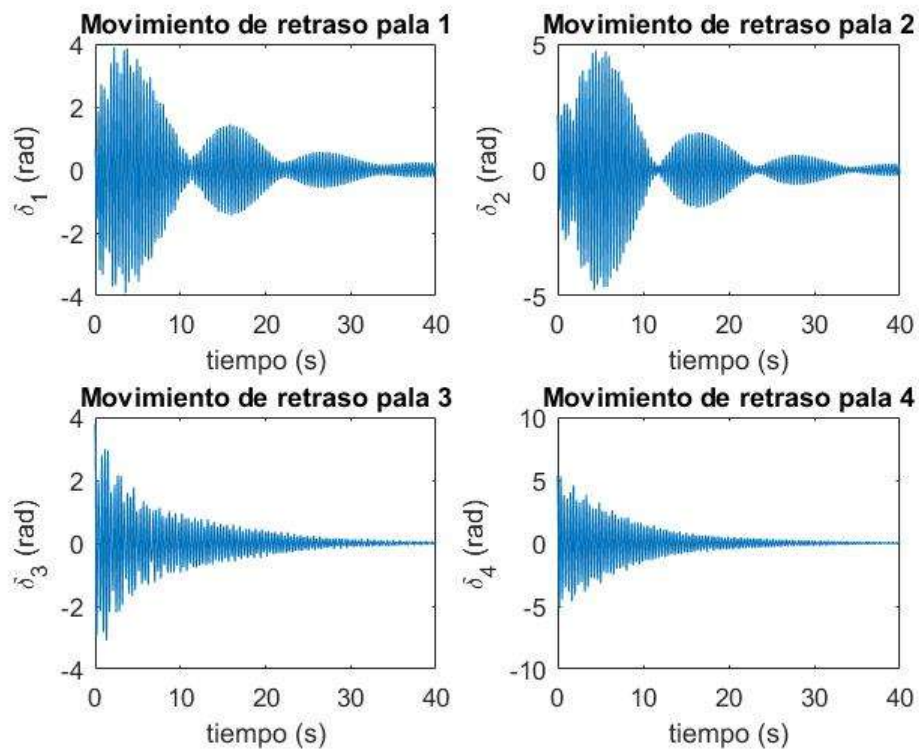


Figura 5-10. Desplazamiento de las N palas del sistema BP2

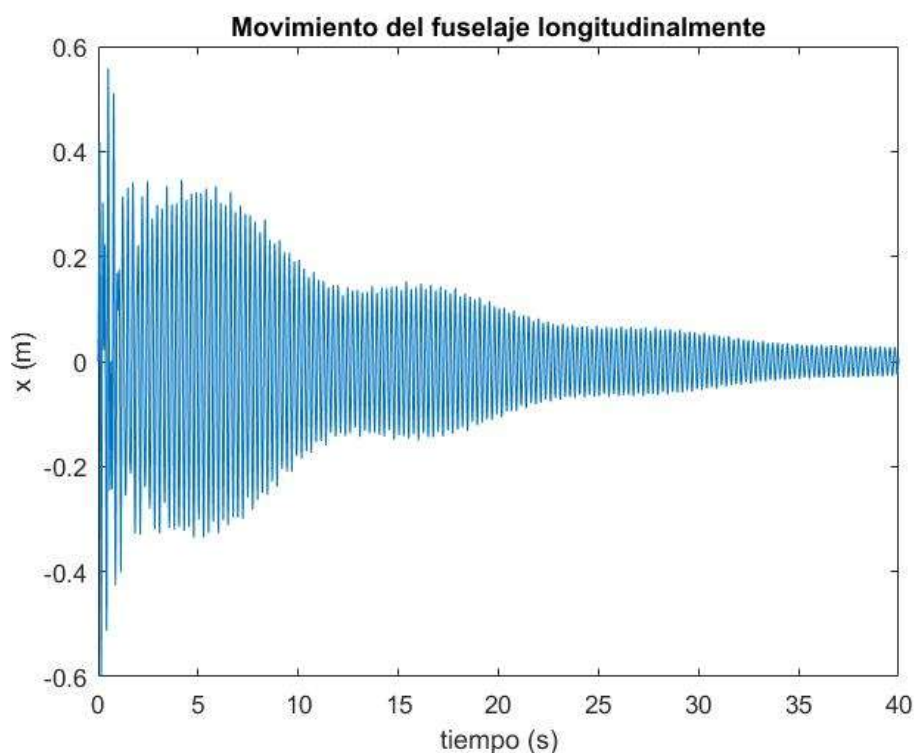


Figura 5-11. Desplazamiento longitudinal del fuselaje BP2

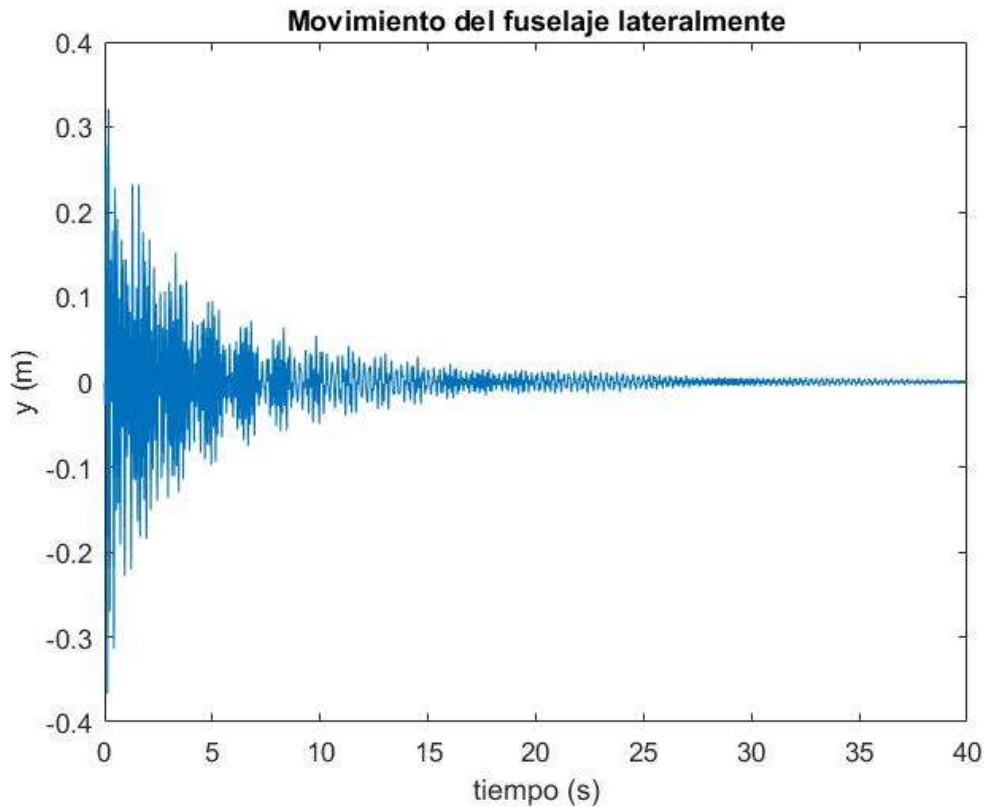


Figura 5-12. Desplazamiento lateral del fuselaje BP2

Como vemos la vibración se amortigua con el tiempo. También se puede observar como cuando existe la vibración, los valores no son demasiado elevados.

Por otro lado, se puede entender la vibración existente debido a la inestabilidad característica de un helicóptero, por lo que dichas vibraciones existentes desaparecerían progresivamente y cuando se apagará el motor desaparecerían completamente sin ningún problema.

El principal resultado que se saca de este análisis es que cuando nos encontramos en la zona estable, al tener un amortiguamiento superior (en base a los resultados el amortiguamiento del adaptador parece ser más importante que el del fuselaje ya que necesita variar menos para cambiar el comportamiento), el funcionamiento del helicóptero sería normal y no se produciría ningún tipo de vibración asociada a este fenómeno.

6 ESTUDIO ANALÍTICO

Nuestra mayor debilidad radica en renunciar. La mejor manera de tener éxito es siempre intentarlo una vez más..

-Thomas Edison-

Una vez realizado el estudio numérico del problema, con el fin de observar el crecimiento de las oscilaciones y de los desplazamientos en un corto margen de tiempo, se pasa a realizar el estudio analítico.

El cambio de variable realizado al sistema original conocido como Transformación de Coleman ha permitido convertir las ecuaciones originales con coeficientes dependientes del tiempo en ecuaciones con coeficientes constantes, y que por tanto, no requieren del análisis numérico para tratarlas sino que se las puede tratar analíticamente.

No obstante, la complejidad de estudiarlas analíticamente también es muy grande, por lo que a la hora de realizar este estudio solo se considera el acoplamiento entre el movimiento de δ_{1c} y δ_{1s} de las palas y el movimiento del fuselaje a lo largo de la dirección y, es decir, despreciando el movimiento del fuselaje a lo largo de la dirección x. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que se va a estudiar aquí es el siguiente:

$$\begin{aligned}\ddot{\delta}_{1c} + 2\lambda_{\delta}\omega_{\delta}\dot{\delta}_{1c} + 2\Omega\dot{\delta}_{1s} + (\omega_{\delta}^2 - \Omega^2)\delta_{1c} + 2\lambda_{\delta}\omega_{\delta}\Omega\delta_{1s} + S_c\dot{y} &= 0 \\ \ddot{\delta}_{1s} + 2\lambda_{\delta}\omega_{\delta}\dot{\delta}_{1s} - 2\Omega\dot{\delta}_{1c} + (\omega_{\delta}^2 - \Omega^2)\delta_{1s} - 2\lambda_{\delta}\omega_{\delta}\Omega\delta_{1c} &= 0 \\ \ddot{y} + 2\lambda_y\omega_y\dot{y} + \omega_y^2y - S_{dy}\ddot{\delta}_{1c} &= 0\end{aligned}\tag{6-1}$$

El objetivo de este estudio es establecer un criterio de estabilidad. Para ello se va a resolver la ecuación característica del sistema. Poniendo el sistema en forma matricial nos queda:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F\tag{6-2}$$

donde M es la matriz de masa, C la matriz de amortiguamiento, K la matriz de rigidez, F el vector de fuerzas y X el vector de incógnitas, los cuales son:

$$\begin{aligned}X &= \begin{bmatrix} \delta_{1c} \\ \delta_{1s} \\ y \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_c \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{dy} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 2\lambda_{\delta}\omega_{\delta} & 2\Omega & 0 \\ -2\Omega & 2\lambda_{\delta}\omega_{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_y\omega_y \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} (\omega_{\delta}^2 - \Omega^2) & 2\lambda_{\delta}\omega_{\delta}\Omega & 0 \\ -2\lambda_{\delta}\omega_{\delta}\Omega & (\omega_{\delta}^2 - \Omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & \omega_y^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La ecuación característica que se usa para evaluar la estabilidad es;

$$\det(Mp^2 + Cp + K) = 0 \quad (6-3)$$

Se van a realizar dos análisis dentro del estudio analítico. El primero de ellos será simplificando aún más el sistema de ecuaciones anterior de la forma que veremos a continuación, y que nos permitirá obtener la relación sobre las frecuencias vista en la teoría. El segundo, será el análisis del sistema de ecuaciones anterior y que permitirá establecer un criterio de estabilidad en base a un valor crítico que debe poseer el amortiguamiento del sistema para que sea estable.

6.1 Análisis simplificado

Si consideramos el acoplamiento entre el rotor y el fuselaje despreciable, así como el amortiguamiento del rotor, las matrices anteriores ahora simplificadas serían:

$$\begin{aligned} M' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C' &= \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega \\ -2\Omega & 0 \end{bmatrix} \\ K' &= \begin{bmatrix} (\omega_\delta^2 - \Omega^2) & 0 \\ 0 & (\omega_\delta^2 - \Omega^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación característica tenemos lo siguiente:

$$\det \left(\begin{bmatrix} p^2 + (\omega_\delta^2 - \Omega^2) & 2\Omega p \\ -2\Omega p & p^2 + (\omega_\delta^2 - \Omega^2) \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (6-4)$$

Resolviendo el determinante obtenemos:

$$p^4 + 2(\omega_\delta^2 + \Omega^2)p^2 + (\omega_\delta^2 - \Omega^2)^2 = 0 \quad (6-5)$$

$$p^2 = \frac{-2(\omega_\delta^2 + \Omega^2) \pm \sqrt{4(\omega_\delta^2 + \Omega^2)^2 - 4(\omega_\delta^2 - \Omega^2)^2}}{2} \quad (6-6)$$

$$p^2 = \frac{-2(\omega_\delta^2 + \Omega^2) \pm 2\omega_\delta\Omega}{2} \quad (6-7)$$

$$p^2 = \begin{cases} -(\omega_\delta + \Omega)^2 \\ -(\omega_\delta - \Omega)^2 \end{cases} \quad (6-8)$$

Por lo tanto, las posibles raíces de la ecuación son:

$$p = \begin{cases} i(\omega_\delta + \Omega) \\ i(\omega_\delta - \Omega) \end{cases} \text{ y sus correspondientes conjugados} \quad (6-9)$$

Normalmente, las frecuencias varían ligeramente con el amortiguamiento y con el acoplamiento, por lo que si

suponemos esto como válido, una primera condición de acoplamiento será la siguiente:

$$\omega_y = |\Omega - \omega_\delta| \quad (6-10)$$

Como vemos, ésta era la condición que se había establecido en el marco teórico como necesaria pero no suficiente para que se produzca el fenómeno, con lo que queda claro la correlación del estudio teórico con un estudio del fenómeno de manera analítica.

Esta condición de acoplamiento se puede también suponer verdadera en el límite de estabilidad, dando lugar a la forma de Coleman del criterio de estabilidad, como veremos cuando se realice el análisis de la ecuación completa.

Por último, añadir que esta solución en forma de $p=i\omega$ es de gran importancia al analizar el sistema completo, ya que esta se usa en la ecuación de sexto grado que se presenta reduciendo ligeramente la complejidad del mismo y abriendo una vía para su solución.

6.2 Análisis completo

Con realizar ahora el análisis completo nos referimos a realizarlo sin hacer ninguna hipótesis adicional, es decir, el determinante que habría que resolver ahora sería el siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} p^2 + 2\lambda_\delta \omega_\delta + (\omega_\delta^2 - \Omega^2) & (p + 2\lambda_\delta \omega_\delta)\Omega & -S_c p^2 \\ -(p + 2\lambda_\delta \omega_\delta)\Omega & p^2 + 2\lambda_\delta \omega_\delta + (\omega_\delta^2 - \Omega^2) & 0 \\ -S_{dy} p^2 & 0 & p^2 + 2\lambda_y \omega_y + \omega_y^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (6-11)$$

Se puede ya atisbar la dificultad de resolución que va a tener dicho polinomio, el cual queda en forma esquemática de la siguiente manera:

$$Ap^6 + Bp^5 + Cp^4 + Dp^3 + Ep^2 + Fp + G = 0 \quad (6-12)$$

Los coeficientes que aparecen son los siguientes:

$$\begin{aligned} A &= 1 - S_c S_{dy} \\ B &= 4\lambda_\delta \omega_\delta - 2\lambda_\delta \omega_\delta S_c S_{dy} + 2\lambda_y \omega_y \\ C &= 2\Omega^2 + \Omega^2 S_c S_{dy} + 2\omega_\delta^2 + (2\lambda_\delta \omega_\delta)^2 - S_c S_{dy} \omega_\delta^2 + 8\lambda_\delta \omega_\delta \lambda_y \omega_y + \omega_y^2 \\ D &= 4\lambda_\delta \omega_\delta \Omega^2 + 4\lambda_\delta \omega_\delta^3 + 4\lambda_y \omega_y \Omega^2 + 4\lambda_y \omega_\delta^2 \omega_y + 8\lambda_\delta^2 \omega_\delta^2 \lambda_y \omega_y + 4\lambda_\delta \omega_\delta \omega_y^2 \\ E &= \Omega^4 - 2\Omega^2 \omega_\delta^2 + \omega_\delta^4 + 8\lambda_\delta \omega_\delta \lambda_y \omega_y \Omega^2 + 8\lambda_\delta \lambda_y \omega_y \omega_\delta^3 + 2\Omega^2 \omega_y^2 + 4\lambda_\delta^2 \omega_\delta^2 \omega_y^2 + 2\omega_\delta^2 \omega_y^2 \\ F &= 2\lambda_y \omega_y \Omega^4 - 4\lambda_y \omega_y \Omega^2 \omega_\delta^2 + 8\lambda_\delta^2 \omega_\delta^2 \lambda_y \omega_y \Omega^2 + 2\lambda_y \omega_y \omega_\delta^4 + 4\lambda_\delta \omega_\delta \Omega^2 \omega_y^2 + 4\lambda_\delta \omega_\delta^3 \omega_y \\ G &= \Omega^4 \omega_y^2 + 2\Omega^2 \omega_\delta^2 \omega_y^2 (\lambda_\delta^2 - 1) + \omega_\delta^4 \omega_y^2 \end{aligned}$$

Gracias a lo hallado con el análisis simplificado, se prueba una solución de la ecuación X de la forma $p=i\omega$, reduciendo en cierta medida la ecuación anterior. Al probar la solución mencionada pasamos de la ecuación que tenemos a un sistema de ecuaciones (separando parte real e imaginaria) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} A\omega^6 + C\omega^4 + E\omega^2 + G = 0 \\ B\omega^4 + D\omega^2 + F = 0 \end{cases} \quad (6-13)$$

Vemos que con este tipo de solución se puede reducir a una cuadrática, de la que habría que hallar la solución, y sustituir dichos valores en la primera ecuación y ver cuando este se haría cero, siendo esta solución que cumpliría ambas ecuaciones.

Este sistema fue resuelto en [11] basándose en el carácter negativo de los ceros del determinante, hallando el siguiente criterio de estabilidad:

$$\lambda_y \lambda_\delta \geq \frac{1}{8} S_c S_{dy} \frac{(\Omega - \omega_\delta)^2}{\omega_\delta} \frac{(\Omega - \omega_\delta)}{w_y} \quad (6-14)$$

Volviendo a los parámetros originales, el criterio de estabilidad puede entonces ser reescrito de la siguiente manera:

$$\lambda_y \lambda_\delta \geq \frac{1}{16 I (M_y + N m_p)} \frac{N m_s^2}{\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_\delta}\right)^2} \frac{(\Omega - \omega_\delta)}{w_y} \quad (6-15)$$

Nótese que la solución del sistema es muy compleja, debido a la dificultad de resolver una ecuación de sexto grado, que a pesar de haber desembocado en dos ecuaciones, una de ellas cuadrática, sigue teniendo una complejidad apreciable debido a los coeficientes tan grandes que aparecen, por lo que a la hora de resolverla debieron hacer varias hipótesis adicionales, no mencionadas en su libro, pero imprescindibles a la hora de resolver una ecuación de tal dificultad.

Este criterio de estabilidad nos da a su vez una relación el tipo de rotor donde puede ocurrir el fenómeno de la resonancia en tierra. En un rotor rígido ($\omega_\delta > \Omega$), el término de la derecha es siempre negativo, por lo que el producto de los amortiguamientos del tren de aterrizaje y del adaptador será siempre mayor, ya que este no puede ser negativo, por lo que el sistema será estable independientemente del amortiguamiento que el sistema tenga.

En cambio, en un rotor flexible ($\omega_\delta < \Omega$), el producto de los amortiguamientos debe ser mayor que un valor crítico que depende de las características del sistema, principalmente de la rigidez aportada por el adaptador y el tren de aterrizaje.

En este criterio, si despreciamos la masa de las palas en relación a la masa del fuselaje y si hacemos uso de la relación (2-1) referente al acoplamiento de movimientos, obtenemos la forma de Coleman del criterio de estabilidad.

$$\lambda_y \lambda_\delta \geq \frac{N}{16 I M_y} \frac{m_s^2}{\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_\delta}\right)^2} \quad (6-16)$$

6.3 Comparación criterios de estabilidad

La gráfica que se obtuvo en [11] representando el criterio de estabilidad anterior es la siguiente:

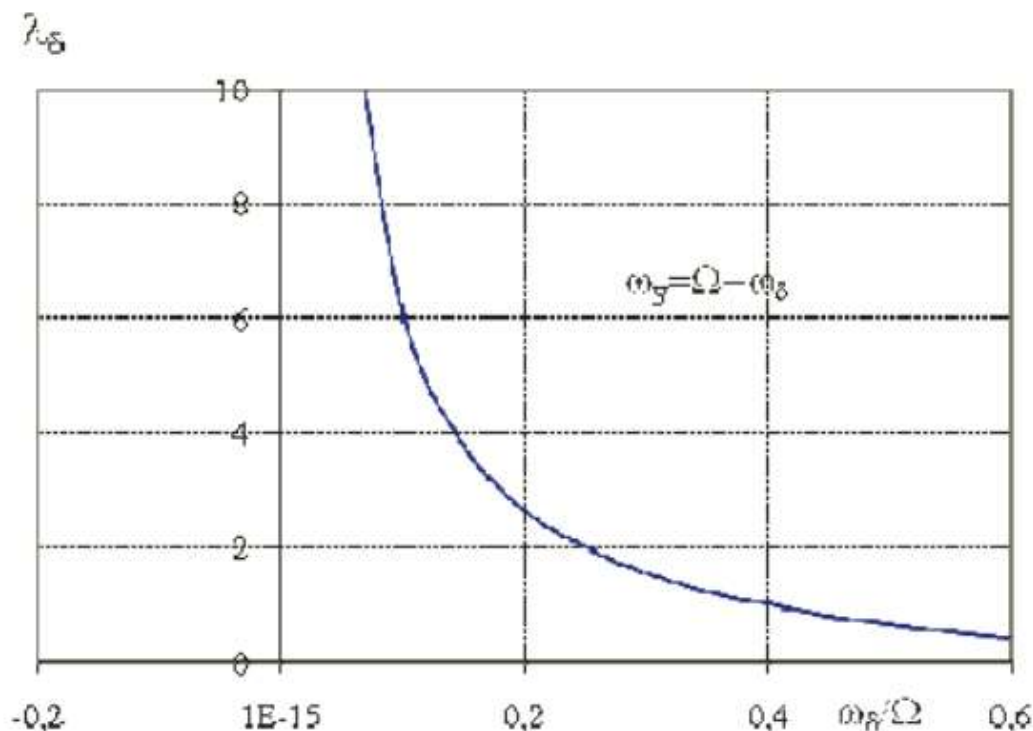


Figura 6-1. Criterio de estabilidad literatura (Figura Mechanical Instability)

Lo primero es darse cuenta de que el eje y está multiplicado por un 10^{-3} , para tener valores razonables de dicho parámetro.

Se puede observar, fijándose en la figura anterior, que el comportamiento es muy similar al hallado numéricamente en el capítulo anterior. Cuanto mayor es la relación ω_δ/Ω , menor es el amortiguamiento necesario. Esto nos reafirma el concepto de que la resonancia en tierra no se da en rotores rígidos, ya que el amortiguamiento necesario tiende a 0 y, obviamente, el amortiguamiento que tiene el helicóptero es superior. Esto ya se vio también con la expresión analítica del criterio de estabilidad.

Se puede ver que el rango de valores que alcanza λ_δ es muy similar en ambos criterios, lo que nos dice que la expresión hallada en [11] se corresponde con la curva hallada numéricamente, por lo que modela con bastante precisión la curva que da la estabilidad del sistema.

Mencionar también que el criterio de estabilidad expuesto en [11] no es el único que se puede hallar a través de la ecuación característica del sistema. Otros autores, tales como Bramwell [4], llegaron a través de dicha ecuación a criterios de estabilidad similares. Por ejemplo, el propuesto en dicha obra es:

$$\lambda_y \lambda_\delta \geq \frac{1}{16} \frac{Nm_s^2}{I(M_y + Nm_p)} \frac{\omega_y^2}{w_\delta(\Omega - \omega_y)}$$

La diferencia radicaré en las distintas hipótesis que se hayan hecho a la hora de resolver la ecuación característica, ya que como se dijo antes, ésta no puede ser resuelta sin aplicar hipótesis adicionales debido a su complejidad.

Para concluir, lo que queda principalmente patente de este estudio es la correspondencia entre el criterio hallado en la literatura proveniente de resolver la ecuación característica del sistema con el estudio realizado en base a la teoría de control, que permite hallar la curva de estabilidad anterior.

7 CONCLUSIONES

He fallado una y otra vez en mi vida, por eso he conseguido el éxito.

-Michael Jordan-

En este capítulo se pretende analizar las conclusiones extraídas con la realización de este Trabajo de Fin de Grado, a modo de resumen.

Lo primero que se ha realizado en el trabajo es un estudio teórico donde principalmente se explica qué es el fenómeno de la resonancia en tierra, en qué condiciones se produce y como puede evitarse. En resumen, es una inestabilidad mecánica que implica el acoplamiento del movimiento de las palas en el plano de rotación y el movimiento del fuselaje. Se obtiene una expresión teórica (2-1) que expresa dicho acoplamiento. Sin embargo, esta relación expresa que cuanto más cerca esté de ser cierta, más rápido aumentará la vibración en el helicóptero, no que debe satisfacerse exactamente para que se pueda dar un episodio de resonancia en tierra. Fundamentalmente, lo que produce dicha inestabilidad es que, si las palas no se mueven en fase, el centro de gravedad no coincide con el centro de rotación, produciendo su rotación en torno al mismo, y dando origen a la aparición de fuerzas de inercia, que excitan al fuselaje provocándole un movimiento oscilatorio que aumenta con el tiempo.

Las soluciones para evitar que esto pase, dejando a un lado las que involucran el factor humano en caso de que se dé un caso de resonancia en tierra y que, principalmente, radican en efectuar un despegue rápidamente, residen en el diseño. La rigidez del sistema juega un papel importante, pero no tanto como el amortiguamiento. Si el amortiguamiento del helicóptero es lo suficientemente elevado la vibración sería amortiguada y en vez de aumentar con el tiempo decrecería. El efecto de la rigidez es desplazar el acoplamiento, es decir, hace que la velocidad de giro para la que se produce el acoplamiento sea mayor, pudiendo quedar fuera del rango operativo del helicóptero.

Lo segundo, una vez estudiado teóricamente el fenómeno, se deduce un modelo para el estudio numérico y analítico (después de aplicar la Transformación de Coleman que elimina los términos periódicos del sistema). En dicho modelo se considera amortiguamiento y rigidez lineal, tanto del adaptador que hay entre la cabeza del rotor y la pala como del tren de aterrizaje, que se modela como muelles.

Para dicho modelo se proponen tres bloques de parámetros. El primero, extraído de la literatura, para hallar la curva de estabilidad del sistema. Los otros dos bloques tienen parámetros tales que se sitúan el primero de ellos en la zona inestable del sistema y el segundo de ellos en la zona estable, lo cual nos permite estudiar numéricamente el comportamiento del fenómeno cuando se está en la zona inestable, aumentando con el tiempo, y cuando está en la zona estable, consiguiendo mitigar las vibraciones únicamente habiendo aumentado el amortiguamiento, lo que concuerda con lo estudiado en el marco teórico, así como validando la curva de estabilidad hallada.

El estudio analítico arroja dos resultados principalmente. El primer resultado, que se obtiene al hacer el análisis simplificado, es la misma relación expuesta en el marco teórico que expresa el acoplamiento de movimientos, a pesar de que ya se ha mencionado que hay que tener precaución con dicha condición, ya que no es exacta. El segundo resultado que se extrae con el estudio analítico del mismo es el polinomio característico del sistema que permite evaluar la estabilidad del mismo y, por lo tanto, es lo que permite hallar la curva de estabilidad.

También se engloba en el estudio analítico un criterio de estabilidad hallado en [11] al resolver el polinomio característico, el cual es comparado con la curva de estabilidad numérica hallada en el capítulo

anterior. Se ve la concordancia en rasgos generales de ambas, ya que los valores que se alcanzan del coeficiente de amortiguamiento del adaptador son muy similares y, por extensión, también lo son las zonas estable e inestable que se determinan.

Este criterio de estabilidad también pone de manifiesto que un episodio de resonancia en tierra solo se produce en rotores flexibles, debido a que solo puede llegar a suceder si la frecuencia natural de las palas es menor que la velocidad de giro del rotor, por lo que en rotores rígidos donde esto no se da, un episodio de resonancia en tierra tampoco podría darse. Este criterio corrobora lo introducido en el capítulo 1 en torno a que el tipo de rotor que posea el helicóptero es de suma importancia en la aparición o no del fenómeno.

REFERENCIAS

- [1] Aguirre Hernández, B., Loredó Villalobos, C. A., Díaz González, E. C., & Campos Cantón, E. (2017). Estabilidad de sistemas por medio de polinomios Hurwitz. *Revista de matemática: Teoría y aplicaciones*.
- [2] Barcala Montejano, M. A., & Rodríguez Sevillano, Á. A. Helicópteros. Sistema control-Mandos de vuelo. UPM.
- [3] Bergeot, B., Bellizzi, S., & Cochelin, B. (2015). Analysis of steady-state response regimes of a helicopter ground resonance model including a non-linear energy sink attachment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*.
- [4] Bramwell, A., Done, G., & Balmford, D. (2001). *Bramwell's Helicopter Dynamics*. Butterworth-Heinemann.
- [5] Chen, S.-Y., Austin, E. E., & Berman, A. (1984). *Ground Resonance analysis using a substructure modeling approach*. NACA report.
- [6] Coleman, R. P., & Feingold, A. M. (1957). *Theory of Self-excited Mechanical Oscillations of Rotor with Hinged Blades*. NACA report.
- [7] *Dirección general de protección civil y emergencias*. (s.f.). Obtenido de <http://www.proteccioncivil.es/>
- [8] Fernández Gómez, M. (2010). *Análisis estructural de una pala del rotor de un helicóptero medio*.
- [9] García Martínez, M. Á., & Lozano Amaro, J. C. (2014). *Análisis de esfuerzos en una flecha de un helicóptero a escala*.
- [10] *Helicopter Flight Training*. (s.f.). Obtenido de www.danubewings.com
- [11] Kryszinski, T., & Malburet, F. (2011). *Mechanical Instability*. WILEY.
- [12] Mil, M. (1967). *Helicopters-Calculation and Design-. Volume II. Vibrations and Dynamic Stability*. NASA.
- [13] *Mundo Aeronáutico EWM*. (s.f.). Obtenido de <http://www.alasewm.com.ar/>

- [14] Perez Benzor, J. A. (2013). TEORÍA DE CONTROL: Polos, ceros y estabilidad. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
- [15] Ringegni, P., & Ortalli, J. D. (2002). Mecánica III: Rotores. UNLP.
- [16] Sanches, L., Michon, G., Alazard, D., & Berlioz, A. (2014). Response and instability prediction of helicopter dynamics. *International Journal of Non-Linear Mechanics* .
- [17] Tang, D. M., & Dowell, E. H. (1984). *Nonlinear dynamics of a helicopter model in ground resonance*. NACA report.
- [18] *Youtube 1*. (s.f.). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=Rw9HrR_IuS0&feature=youtu.be
- [19] *Youtube 2*. (s.f.). Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=RihcJR0zvfM>
- [20] *Youtube 3*. (s.f.). Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=IN2Bw79KK80>
- [21] *Youtube 4*. (s.f.). Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=6vICf8l-KV0>

ANEXO: PROGRAMAS DE MATLAB

En este anexo se incluyen todos los programas que han sido usados en el desarrollo del trabajo.

1. Datos.m

```
% Archivo de instrucciones donde se incluyen los parámetros físicos y las
% características modales. Esta planteado para dando los parámetros físicos
% calcular las características modales y viceversa.
% Después de ejecutar este archivo se guarda "workspace" en un archivo .mat,
% que es que se carga mediante el comando load en sist.orig
% Los datos se van modificando, por lo que los que estan escritos no son
% los que se usan siempre, sino los usados en alguna de las simulaciones.

clear all, clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DATOS DE PARTIDA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%kdelta=300000; %constante de rigidez angular (adaptador)
e=2.55;%2.55; %Distancia del centro de gravedad de la pala al cubo
mp=50;%50; %masa de cada pala
R=0.3;%0.35; %radio del cubo
ms=mp*e; %momento estático
omega=400*2*pi/60; %velocidad de giro del cubo (constante)
I=mp*e^2; %inercia de la pala
%cdelta=177.8%constante característica amortiguamiento adaptador
ky=4300000; %constante rigidez tren en y
k_x=ky;%constante rigidez tren en x
Mx=2162.5; %masa fuselaje a lo largo de x
My=2162.5;%masa fuselaje a lo largo de y
N=4; %numero de palas
cx=4031;%constante característica amortiguamiento en x tren
cy=cx;%constante característica amortiguamiento en y tren
relfr=0.4;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARÁMETROS ECUACIONES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

kdelta=wdelta^2*I-R*ms*omega^2;
wdelta=sqrt((kdelta+R*ms*omega^2)/I);
%relfr=sqrt((kdelta/(omega^2*I)+R/e));
% omega=sqrt(kdelta/(I*(relfr^2-R/e)));
% wdelta=relfr*omega;
lambdad=0.005;%cdelta/(2*sqrt(I*(kdelta+R*ms*omega^2)));
wx=sqrt(k_x/(Mx+N*mp));
wy=sqrt(ky/(My+N*mp));
lambdax=cx/(2*sqrt((Mx+N*mp)*k_x));
lambday=cx/(2*sqrt((My+N*mp)*ky));
Sc=ms/I;
Sdy=N*ms/(2*(My+N*mp));
Sdx=N*ms/(2*(Mx+N*mp));
```

```
%
% % % % %
% wdelta=2;
% lambdad=0.03;
% wx=1;
% wy=1;
% lambdax=0.02;
% lambday=0.02;
% Sc=0.1;
% Sdy=0.05;
%
% % % % % % ECUACIONES A LA INVERSA % % % % %
% omega=wy+wdelta;
% e=1/Sc;
% ms=mp*e;
% I=mp*e^2;
% My=N*ms/(Sdy*2)-N*mp;
% Mx=My;
% kdelta=wdelta^2*I-R*ms*omega^2;
% cdelta=lambdad*2*sqrt(I*(kdelta+R*ms*omega^2));
% k_x=wx^2*(Mx+N*mp);
% ky=wy^2*(My+N*mp);
% cx=2*lambdax*sqrt((Mx+N*mp)*k_x);
% cy=2*lambday*sqrt((My+N*mp)*ky);
```

2. Sist_orig.m

```
function f=sist_orig(t,r)
```

```
% Funcion que implementa el sistema original
% LLama a un archivo de matlab donde estan guardados los datos a emplear en
% la simulación. Dicho archivo es modificado en función de la simulación
% que se este llevando a cabo.
```

```
load datos.mat
```

```
C=[I 0 0 0 -ms*sin(omega*t) ms*cos(omega*t);0 I 0 0 -ms*sin(omega*t+pi/2) ms*cos(omega*t+pi/2);0
0 I 0 -ms*sin(omega*t+pi) ms*cos(omega*t+pi);...
0 0 0 I -ms*sin(omega*t+3*pi/2) ms*cos(omega*t+3*pi/2);-ms*sin(omega*t) -ms*sin(omega*t+pi/2)
-ms*sin(omega*t)+pi ms*sin(omega*t)+3*pi/2 Mx 0;...
-ms*cos(omega*t) -ms*cos(omega*t+pi/2) -ms*cos(omega*t)+pi ms*cos(omega*t)+3*pi/2 0 My];
```

```
A=[eye(6) zeros(6,6);zeros(6,6) C];
```

```
B=[r(7);r(8);r(9);r(10);r(11);r(12);-cdelta*r(7)-(kdelta+R*ms*omega^2)*r(1);-cdelta*r(8)-
(kdelta+R*ms*omega^2)*r(2);...
-cdelta*r(9)-(kdelta+R*ms*omega^2)*r(3);-cdelta*r(10)-(kdelta+R*ms*omega^2)*r(4);-cx*r(11)-
k_x*r(5)-ms*omega^2*(r(1)*sin(omega*t)...
+r(2)*sin(omega*t+pi/2)+r(3)*sin(omega*t+pi)+r(4)*sin(omega*t+3*pi/2))-
2*ms*omega*(r(7)*cos(omega*t)+r(8)*cos(omega*t+pi/2)+r(9)*cos(omega*t+pi)+r(10)*cos(omega*t+3
*pi/2));...
```

```

-cy*r(12)-
ky*r(6)+ms*omega^2*(r(1)*cos(omega*t)+r(2)*cos(omega*t+pi/2)+r(3)*cos(omega*t+pi)+r(4)*cos(om
ega*t+3*pi/2))+2*omega*ms*(r(7)*sin(omega*t)+r(8)*sin(omega*t+pi/2)...
+r(9)*sin(omega*t+pi)+r(10)*sin(omega*t+3*pi/2));

f=A\B;
%hay que tener en cuenta a la hora de integrar esta función meter
%correctamente la matriz M que multiplica a las derivadas segundas
end

```

3. Result sistorig.m

```

% Archivo de instrucciones que obtiene los resultados empleando el comando
% ode45 del sistema original, llamando a la función sist_orig.
% Se emplea un contador de tiempo en el mismo debido a que habitualmente
% tarda bastante y se contabiliza como referencia a la hora de trabajar.
tic;

v0=zeros(12,1);
% v0(1,1)=pi/18;v0(2,1)=pi/18+pi/2;v0(3,1)=pi/18+pi;v0(4,1)=pi/18+3*pi/2;
% v0(1,1)=Y(end,1);v0(2,1)=Y(end,2);v0(3,1)=Y(end,3);v0(4,1)=Y(end,4);v0(5,1)=Y(end,5);v0(6,1)=Y(
end,6);
v0(1,1)=pi/5;v0(2,1)=pi/5+pi/2;v0(3,1)=pi/5+pi;v0(4,1)=pi/5+3*pi/2;
TOL=0.4e-7;
opciones=odeset('AbsTol',TOL,'RelTol',TOL);
[T,Y]=ode45(@sist_orig,[0 12],v0,opciones);

figure (1)
subplot(2,2,1)
plot(T,Y(:,1))
title('Movimiento de retraso pala 1')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\delta_1 (rad)')

%figure (2)
subplot(2,2,2)
plot(T,Y(:,2))
title('Movimiento de retraso pala 2')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\delta_2 (rad)')

%figure (3)
subplot(2,2,3)
plot(T,Y(:,3))
title('Movimiento de retraso pala 3')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\delta_3 (rad)')

%figure (4)
subplot(2,2,4)
plot(T,Y(:,4))
title('Movimiento de retraso pala 4')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('\delta_4 (rad)')

figure (5)
plot(T,Y(:,5))
title('Movimiento del fuselaje longitudinalmente')

```

```

xlabel('tiempo (s)')
ylabel('x (m)')

figure (6)
plot(T,Y(:,6))
title('Movimiento del fuselaje lateralmente')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('y (m)')

TIEMPO=toc;

display(TIEMPO)

```

4. Routh.m

```

% Archivo de instrucciones que proporciona los polos del polinomio
% característico y la curva de estabilidad.
% En este archivo se dan las características modales, calculando los
% parámetros físicos (aunque no se usan, pero por ver cuales son) y calcula
% con estas los polos del sistema. Cuando se ha calculado los valores de
% lambdad crítico se usa el comando spline para interpolarlos en este mismo
% archivo.

clear all;clc;

%%%%%%%% Datos para el cálculo de la curva de estabilidad (literatura) %%%%%%%%%

mp=50;
N=4;
R=0.3;
wdelta=2;
lambdad=0.0033; % Vamos variando este valor hasta obtener el crítico
wy=1;
lambday=0.02;
Sc=0.1;
Sdy=0.05;
relfr=0.3;

%%%%%%%% ECUACIONES A LA INVERSA %%%%%%%%%
omega=wdelta/relfr;
e=1/Sc;
ms=mp*e;
I=mp*e^2;
My=N*ms/(Sdy*2)-N*mp;
kdelta=wdelta^2*I-R*ms*omega^2;
cdelta=lambdad*2*sqrt(I*(kdelta+R*ms*omega^2));
ky=wy^2*(My+N*mp);
cy=2*lambday*sqrt((My+N*mp)*ky);

sc=Sc;sdy=Sdy;
wd=wdelta;

% Coeficientes del polinomio característico

```

```

A = 1 - sc*sdy;
B = 4*lambda*wd - 2*lambda*sc*sdy*wd + 2*lambda*wy;
C = 2*omega^2 + omega^2*sc*sdy + 2*wd^2 + 4*lambda^2*wd^2 - sc*sdy*wd^2 +
8*lambda*lambda*wd*wy + wy^2;
D = 4*lambda*omega^2*wd + 4*lambda*wd^3 + 4*lambda*omega^2*wy + 4*lambda*wd^2*wy +
8*lambda^2*lambda*wd^2*wy + 4*lambda*wd*wy^2;
E = omega^4 - 2*omega^2*wd^2 + 4*lambda^2*omega^2*wd^2 + wd^4 +
8*lambda*lambda*omega^2*wd*wy + 8*lambda*lambda*wd^3*wy + 2*omega^2*wy^2 +
4*lambda^2*wd^2*wy^2 + 2*wd^2*wy^2;
F = 2*lambda*omega^4*wy - 4*lambda*omega^2*wd^2*wy +
8*lambda^2*lambda*omega^2*wd^2*wy + 2*lambda*wd^4*wy + 4*lambda*omega^2*wd*wy^2
+ 4*lambda*wd^3*wy^2;
G = omega^4*wy^2 - 2*omega^2*wd^2*wy^2 + 4*lambda^2*omega^2*wd^2*wy^2 + wd^4*wy^2;

num=1;
den=[A B C D E F G];

figure(1)
pzmap(num,den)
title('Polos del sistema \lambda_\delta=0.0033 \omega_\delta/\Omega=0.3')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INTERPOLACIÓN %%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% VALORES RESULTADOS LITERATURA %%%%%%%%%%%%%%
x2=[0.2 0.3 0.4 0.5 0.6];
y2=[0.007 0.0033 0.0016 0.0007 0.0003];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Calculamos las asíntotas horizontal y vertical y inteporlamos los valores
%de la curva de estabilidad

s=linspace(0.2,0.6,5001);
sy=linspace(0,y2(1),1001);
sx=linspace(0,x2(end),1001);
lambdarest=spline(x2,y2,s);
asintv(1:length(sy))=0.1732;
asinh(1:length(sx))=0;

%Dibujamos la curva de estabilidad

figure(2)
plot(s,lambdarest,'r')
axis([0 0.6 0 0.007])
xlabel('\omega_\delta/\Omega')
ylabel('\lambda_\delta')
title('Curva de estabilidad')

%Dibujamos la curva de estabilidad con las asíntotas

figure(3)
plot(asintv,sy,'b',sx,asinh,'g',s,lambdarest,'r')
axis([0 0.6 0 0.007])
legend('Asíntota vertical','Asíntota horizontal','Interpolación')

```

```
xlabel('\omega_\delta/\Omega')  
ylabel('\lambda_\delta')  
title('Curva de estabilidad')
```

%Dibujamos la curva de estabilidad con el punto seleccionado

```
figure(4)  
plot(reifr,lambdad,'*',s,lambdadest,'r')  
axis([0 0.6 0 0.007])  
xlabel('\omega_\delta/\Omega')  
ylabel('\lambda_\delta')  
title('Curva de estabilidad BP1')
```